



# Caractérisation de la compaction granulaire par des méthodes acoustiques linéaires et non linéaires

Claude Inserra

## ► To cite this version:

Claude Inserra. Caractérisation de la compaction granulaire par des méthodes acoustiques linéaires et non linéaires. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, Le Mans., 2007. Français. NNT : . tel-01202153

**HAL Id: tel-01202153**

**<https://hal.science/tel-01202153>**

Submitted on 18 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Académie de Nantes

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DU MAINÉ**

LE MANS, FRANCE

*Spécialité : Acoustique*

présentée par

**CLAUDE INSERRA**

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

---

**CARACTÉRISATION DE LA COMPACTION GRANULAIRE PAR DES  
MÉTHODES ACOUSTIQUES LINÉAIRES ET NON LINÉAIRES**

---

Soutenue le 3 Décembre 2007

devant le jury composé de :

<b>O. BOU MATAR</b>	Professeur, IEMN, Lille	Rapporteur
<b>J-L. THOMAS</b>	Chargé de recherche CNRS, INSP, Paris	Rapporteur
<b>P. LAUGIER</b>	Professeur, LIP, Paris	Président de jury
<b>B. GILLES</b>	Maitre de conférence, ISTI, Lyon	Examineur
<b>P. RICHARD</b>	Maitre de conférence, GMCN, Rennes	Examineur
<b>V. GUSEV</b>	Professeur, LPEC, Le Mans	Directeur de thèse
<b>B. CASTAGNEDE</b>	Professeur, LAUM, Le Mans	Co-directeur de thèse
<b>V. TOURNAT</b>	Chargé de recherche CNRS, LAUM, Le Mans	Co-directeur de thèse

## Remerciements

Je remercie tout d'abord Monsieur P. Laugier (Professeur, LIP, Paris) d'avoir accepté la présidence de mon jury de thèse, ainsi que Messieurs O. Bou Matar (Professeur, IEMN, Lille) et J-L. Thomas (Chargé de recherche CNRS, INSP, Paris) d'avoir accepté de rapporter ce travail. Je remercie de même Messieurs B. Gilles (Maître de Conférences, ISTI, Lyon) et P. Richard (Maîtres de Conférences, GMCM, Rennes) d'avoir lu ce document en tant qu'examinateurs.

Je remercie Monsieur V. Gusev (Professeur, LPEC, Le Mans) d'avoir accepté la direction de cette thèse, de toute la confiance dont il a fait preuve à mon égard et de ses conseils précieux. Sa curiosité, son appétit (dans tous les domaines) et sa grande humanité, ainsi que ses pots mémorables, resteront gravés en moi comme les signes d'un grand scientifique.

Je remercie Monsieur V. Tournat (Chargé de recherche CNRS, LAUM, Le Mans), co-directeur, pour l'excellent encadrement dont il a fait preuve pour son premier doctorant. Merci pour le soutien de chaque instant.

Je remercie Monsieur B. Castagnède (Professeur, LAUM, Le Mans), co-directeur de thèse, d'avoir suivi ce travail et facilité mes démarches administratives.

Je remercie chaudement Monsieur V. Zaitsev (Professeur, Nizhny-Novgorod) pour m'avoir permis de découvrir la Russie durant une dizaine de jours tout en me conservant en vie.

Je remercie aussi Monsieur S. Biwa (Assistant Professor, Kyoto) de m'accueillir dans son laboratoire, ce qui me permettra entre autre de découvrir le Japon.

Je tiens à remercier tous les doctorants et chercheurs du laboratoire m'ayant aidé au cours de ce travail. Plus particulièrement, Laurent Fillinger et Xavier Jacob m'ont aidé à rendre ces trois années de thèse plus qu'intéressantes suite aux nombreuses discussions dont nos travaux faisaient l'objet.

Je remercie les doctorants moniteurs CIES pour leur bonne humeur, et le CIES pour nous avoir au moins appris à dire bonjour.

Je remercie tous mes amis doctorants et autres : Stéphane et Cécile, Loic et Thomas, Coupable, Seb et Ludo, Beber et Alex, et tout ceux que j'oublie. Bonne chance à Aurélien et Tony pour leur thèse.

Enfin, merci à la famille pour leur soutien et leur confiance, à Manuela d'avoir reçue cette boule de neige qui nous a mené si loin, et à Ishtar pour sa chaleur. A nous le Japon ...



# Table des matières

Table des matières . . . . .	i
Notations . . . . .	1
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Propagation acoustique dans les milieux granulaires</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Comportements mécaniques des contacts . . . . .	6
1.2.1 Contact de Hertz . . . . .	6
1.2.2 Modèle de Hertz-Mindlin . . . . .	8
1.3 Modèle unidimensionnel de propagation acoustique : la chaîne de billes . . . . .	9
1.3.1 Relation de dispersion . . . . .	10
1.3.2 Ondes non linéaires et solitons . . . . .	11
1.4 Propriétés et problèmes actuels des milieux granulaires non consolidés . . . . .	12
1.4.1 Effets du fluide environnant . . . . .	12
1.4.2 Géométrie des assemblages granulaires . . . . .	13
1.4.3 Désordre des empilements granulaires . . . . .	14
1.4.4 Le silo à grains . . . . .	16
1.4.5 Les non-linéarités acoustiques . . . . .	17
1.4.6 Problèmes actuels . . . . .	22
1.5 Conclusion . . . . .	23
<b>2 Compaction des milieux granulaires</b>	<b>25</b>
2.1 Etat de l'art sur la compaction . . . . .	26
2.1.1 Expériences de Chicago . . . . .	27
2.1.2 Expériences de Rennes . . . . .	32
2.1.3 Simulation numérique . . . . .	35
2.2 Dispositif expérimental . . . . .	37
2.2.1 Dispositif de sollicitation . . . . .	37
2.2.2 Matériau utilisé . . . . .	38
2.2.3 Mesure de la compacité . . . . .	39

2.2.4	Courbes de compaction . . . . .	40
2.3	Caractérisation ultrasonore du milieu granulaire . . . . .	43
2.3.1	Fonctions de réponse en fréquence . . . . .	44
2.3.2	Influence du processus de compaction . . . . .	45
2.3.3	Influence de la taille des billes . . . . .	46
2.4	Conclusion . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Caractérisation non linéaire de l'empilement granulaire</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Génération d'harmoniques . . . . .	51
3.3	Génération de fréquence différence . . . . .	55
3.3.1	Résultats expérimentaux . . . . .	56
3.3.2	Phénomène de clappement . . . . .	59
3.3.3	Interaction non linéaire non classique . . . . .	63
3.4	Résonances non linéaires . . . . .	66
3.4.1	Méthode de résonance . . . . .	66
3.4.2	Résultats expérimentaux . . . . .	66
3.4.3	Suivi de la fréquence de résonance linéaire . . . . .	68
3.4.4	Softening du milieu granulaire . . . . .	70
3.4.5	Dissipation linéaire et non linéaire . . . . .	73
3.4.6	Paramètre de Read . . . . .	75
3.5	Interprétations et discussion . . . . .	80
3.5.1	Sensibilité des méthodes non linéaires . . . . .	80
3.5.2	Modèle qualitatif proposé . . . . .	82
3.6	Conclusion . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Influence des chaînes de force sur la propagation acoustique</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	95
4.2	Position du problème et résolution analytique . . . . .	97
4.2.1	Géométrie du problème considéré et équation du mouvement . . . . .	97
4.2.2	Cas particulier de l'absence de plan de force . . . . .	98
4.2.3	Relation de dispersion du système avec plans de force . . . . .	101
4.2.4	Calcul du déterminant de la matrice dynamique . . . . .	104
4.3	Résolution analytique pour des cas particuliers . . . . .	107
4.3.1	Développements asymptotiques pour $N = 2$ . . . . .	107
4.3.2	Etude du système avec un plan de force unique . . . . .	110
4.4	Résultats numériques pour $N$ quelconque . . . . .	115
4.4.1	Premières observations . . . . .	115
4.4.2	Comportement du premier mode de propagation . . . . .	118
4.4.3	Transition vers un mode guidé . . . . .	119

---

4.5	Estimations en vue d'une application expérimentale . . . . .	123
4.6	Conclusion . . . . .	126
	<b>Conclusion générale</b>	<b>129</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>133</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>137</b>
	<b>Annexe C</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>150</b>





# Introduction générale

Un milieu granulaire est un ensemble de grains solides, de tailles pouvant être variables. Universellement disponibles dans la nature (le sable, la neige, les poudres et les graines par exemple), les milieux granulaires sont, après l'eau, le matériau le plus utilisé par l'homme (industrie agroalimentaire, comprimés pharmaceutiques, poudres et céramiques, béton, ...). Dans l'industrie, ces milieux exhibent des comportements complexes lors de leur manipulation (ségrégation, écoulements, instabilités) qui nécessitent des solutions pratiques impliquant une meilleure compréhension de la physique de ces milieux. En particulier, une opération courante au niveau industriel est la compaction des milieux granulaires. La compaction d'un empilement granulaire consiste à diminuer le volume du milieu en réarrangeant l'ensemble des grains sous l'action d'une sollicitation extérieure. Les deux méthodes généralement employées pour compacter un milieu sont la compression uniaxiale de l'empilement ou la vibration, le plus souvent dans la direction verticale. Dans le cas d'une compression uniaxiale, la contrainte appliquée est nécessairement forte et peut mener à l'endommagement des grains. Lorsque l'intégrité des grains doit être préservée, des vibrations sont employées, provoquant une densification lente par l'évolution structurale du milieu purement géométrique.

Le comportement mécanique des assemblages granulaires est complexe, et peut, selon les conditions extérieures, se rapprocher de celui d'un solide, d'un liquide, voire même d'un gaz. Lorsque des assemblages granulaires sont conservés dans des volumes clos (le silo par exemple), leur comportement demeure inhabituel. Les milieux granulaires, considérés dans cette étude, sont composés de billes sphériques non cohésives soumises à la gravité. Ces milieux sont dits milieux granulaires non consolidés. Une caractéristique particulière de ces milieux est la transmission inhomogène de la force appliquée, préférentiellement le long de quelques chaînes de billes, appelées chaînes de force. Les billes, non impliquées dans ces chaînes de force, sont souvent appelées les spectatrices, du point de vue de l'élasticité du milieu. Il existe donc une distribution statistique de force pour chaque contact, comportant des contacts fortement et faiblement chargés. Cette distribution statistique de forces, difficilement accessible expérimentalement, est une des clefs de la compréhension de l'élasticité des milieux granulaires.

L'acoustique non linéaire est une branche relativement récente de l'acoustique qui consiste à étudier les effets non prévus dans les équations linéarisées de l'acoustique. Dans les fluides ou les matériaux homogènes, l'approximation linéaire des équations de l'acoustique permet de décrire précisément la pro-

pagation d'ondes lorsque l'amplitude du champ acoustique est suffisamment faible. Si ces milieux sont soumis à de fortes excitations acoustiques, il est nécessaire de prendre en compte des corrections aux équations linéarisées pour comprendre la variété des phénomènes observés (génération d'harmoniques, ondes de choc par exemple). Cependant, dans le cas de certains milieux complexes, l'approximation linéaire ne permet pas de décrire tous les comportements observés (hystérésis, dynamique lente), et ceci même pour des excitations acoustiques modérées. Ces phénomènes, dans les solides, sont le plus souvent attribués à la présence de contacts internes (entre grains, entre lèvres de fissures, ...).

En effet, récemment, un nombre croissant d'observations expérimentales et théoriques ont été effectuées en acoustique non linéaire dans les matériaux micro-inhomogènes, comme les roches, les solides fissurés, ou les milieux granulaires. Des phénomènes nouveaux d'interactions non linéaires ont été mis en évidence dans ces milieux complexes, et leurs manifestations apportent toujours plus d'informations et de compréhension à leur sujet. Il a notamment été démontré que dans certaines conditions les effets d'acoustique non linéaire sont plus sensibles pour détecter des inhomogénéités de structure que les méthodes d'acoustique linéaire.

La complexité des milieux granulaires leur confère un statut particulier au sein des différentes classes de matériaux. En plus de représenter un milieu d'étude intéressant pour différentes branches de la physique, ils comportent des non-linéarités originales du point de vue de l'acoustique. Mais aussi, l'approche acoustique non linéaire est un outil prometteur pour comprendre leur structure et percer la richesse des comportements observés.

Dans les milieux granulaires, alors que les méthodes d'acoustique linéaire fournissent des mesures pour lesquelles la réponse des contacts fortement chargés prédomine, les méthodes d'acoustique non linéaire ont démontré une plus forte sensibilité aux contacts faiblement chargés. En effet, la contribution d'un contact individuel à la non-linéarité du milieu granulaire est plus forte pour un contact faiblement chargé que pour un contact fortement chargé. Pour cette raison, le coefficient de non-linéarité quadratique des matériaux contenant des contacts internes peut être  $10^3$  à  $10^4$  plus élevé que dans un solide homogène. Tout ceci indique clairement le potentiel des développements des approches d'acoustique non linéaire pour la caractérisation des milieux granulaires, à travers l'évaluation de la distribution statistique de forces de contacts par exemple.

La considération physique clef qui motive cette étude est le fait que les faibles contacts (faiblement pré-contraints) dans le milieu granulaire sont ceux qui sont le plus fortement non linéaires. Il est alors proposé de développer des méthodes d'acoustique non linéaire de caractérisation de la statistique des contacts dans le milieu. Ceci est effectué durant des processus de compaction, où l'état structural de l'empilement évolue avec les vibrations imposées. Il est attendu que les méthodes d'acoustique non linéaire renseignent sur l'évolution de la distribution de force de contacts et permettent de mieux maîtriser l'élasticité du matériau.

Cette thèse est composée de quatre chapitres. Le premier chapitre a pour objectif de présenter de manière générale la propagation acoustique au sein des milieux granulaires. Après la description de la mécanique du contact entre deux billes élastiques à travers le modèle de Hertz-Mindlin, la propagation acoustique dans les milieux granulaires est abordée dans le cas unidimensionnel d'une chaîne de billes précontraintes. Enfin, les caractéristiques des milieux granulaires non consolidés sont discutées, ainsi que l'intérêt d'employer des méthodes d'acoustique non linéaire.

Le second chapitre est consacré à la compaction des milieux granulaires. Le dispositif expérimental conçu pour compacter un ensemble granulaire est présenté, ainsi que les propriétés classiques de réarrangements de ces milieux. Enfin, la caractérisation de l'empilement est abordée au moyen de fonctions de réponse en fréquence pour la transmission acoustique à travers le milieu.

Dans le troisième chapitre, des méthodes d'acoustique non linéaire sont employées pour caractériser le milieu. Le comportement non linéaire du milieu granulaire est analysé à partir de résultats expérimentaux, en particulier par la mesure des parties élastiques et dissipatives du paramètre non linéaire hystérétique. Un modèle discutant de la physique des éléments micromécaniques du milieu granulaire et de leurs contributions aux non-linéarités acoustiques analyse l'évolution qualitative et quantitative de paramètres acoustiques au cours du processus de compaction. Il en découle des implications sur la distribution de forces de contact.

Enfin, dans le dernier chapitre, l'influence des chaînes de force sur la propagation acoustique est étudiée au moyen d'une modélisation analytique et numérique. La propagation d'ondes acoustiques transverses est analysée dans un réseau granulaire cubique simple, périodiquement chargé par des chaînes de forces. Le développement de cas limites du modèle et la résolution numérique permet d'obtenir les différents modes de vibration du réseau et d'interpréter l'effet d'une modulation élastique du système (caractérisant les chaînes de force) sur la propagation d'ondes.



# Chapitre 1

## Propagation acoustique dans les milieux granulaires

### 1.1 Introduction

Les comportements mécaniques des milieux granulaires dépendent des interactions des grains entre eux mais aussi des grains avec leur environnement (le fluide saturant, les parois, ...). Lorsque l'interaction avec le fluide saturant l'espace inter-grains est négligeable, le milieu granulaire est dit "sec". Les interactions sont alors réduites aux contacts entre grains (éventuellement avec frottements, chocs, ...) et avec les parois du récipient. Ce premier chapitre, à caractère introductif, regroupe les notions de base de la mécanique des contacts et de la propagation acoustique dans les milieux granulaires, utiles pour la compréhension de la suite du document. Après l'étude de l'interaction entre deux sphères élastiques, des éléments de la propagation acoustique dans la configuration d'une chaîne de billes unidimensionnelle sont examinés. Les caractéristiques géométriques et acoustiques (propagation des contraintes) des milieux granulaires non consolidés sont discutées. Les non-linéarités potentielles susceptibles d'apparaître dans les milieux granulaires sont présentées. Enfin, une approche succincte des problèmes actuels de la physique des milieux granulaires est réalisée.

## 1.2 Comportements mécaniques des contacts

Le comportement macroscopique des milieux granulaires secs est en partie conditionné par les propriétés mécaniques des contacts inter-grains. En effet, la grande variété des manifestations exhibées sous sollicitations extérieures est largement déterminée par la nature des interactions mécaniques entre particules et avec les parois. Dans ce travail de thèse, une simplification forte pour le milieu granulaire est la prise en compte de grains sphériques et de tailles identiques. La description de l'interaction mécanique entre deux sphères élastiques de même rayon soumises à une force normale, introduite dans les années 1880 par la théorie de Hertz [41], permet de relier la force normale agissant entre deux sphères au déplacement relatif de leurs centres [41]. Par la suite, cette théorie a été étendue au cas d'une force tangentielle entre deux sphères [61]. Cette théorie, bien vérifiée expérimentalement [41], est un point de départ de la compréhension de la physique de ces milieux.

### 1.2.1 Contact de Hertz

Considérons tout d'abord le cas de deux sphères en contact soumises à une force normale  $N$ . Hertz [41] a pour la première fois utilisé l'élasticité linéaire des milieux continus pour calculer la relation force/déplacement entre deux sphères en contact. Lorsque deux sphères entrent en contact sans déformation, le contact est initialement ponctuel, ou linéique pour l'interaction de deux cylindres ou d'un cylindre avec un plan. Dans le cas général où la forme de la surface de contact n'est pas connue avec certitude, la surface de contact, une fois les corps chargés, est une ellipse. En ne considérant que des solides de révolution, la surface de contact est un cercle de rayon  $a$ . La zone de contact, petite comparée aux dimensions des deux solides, augmente à mesure que la charge croît. Cette zone est le siège de fortes contraintes qui n'influencent pas la forme des solides en contact. Chaque corps est alors considéré comme un demi-espace élastique linéaire chargé sur une région elliptique de sa surface plane. Par conséquent, les contraintes concentrées sur la zone de contact peuvent être traitées séparément du problème élastique de la distribution de contraintes des deux corps. Pour deux solides de révolution en contact, les hypothèses de la théorie de Hertz sont :

- une surface de contact petite devant la dimension des sphères de rayon  $R$ , c'est-à-dire  $a \ll R$ ,
- l'absence de frottements au niveau du contact pour que seule une force normale puisse se transmettre à travers la zone de contact,
- des surfaces de contact continues et non conformes,
- des solides considérés comme des demi-espaces élastiques semi-infinis.

Le problème du contact entre deux sphères élastiques chargées par une force normale, étendu au cas avec force tangentielle, est illustré sur la figure 1.1(a). Le problème considéré dans la suite est limité au cas du contact entre deux sphères de même rayon  $R$ .

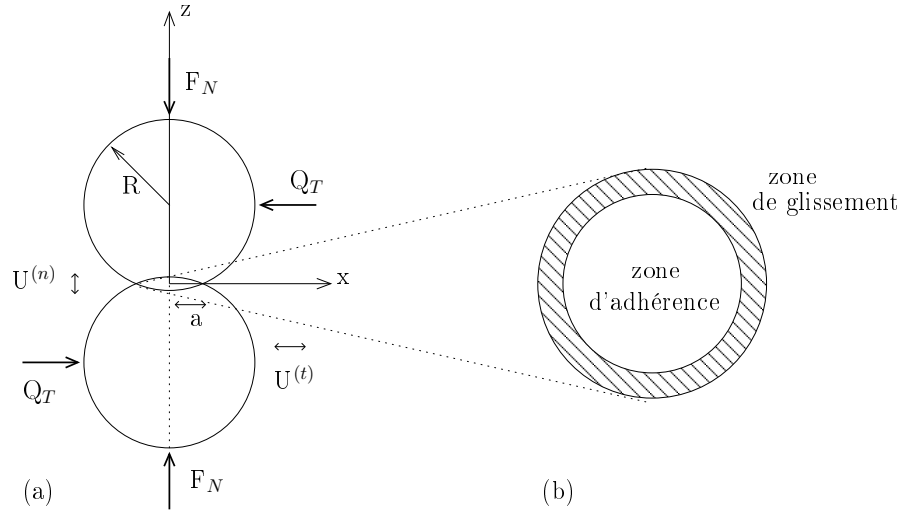


FIG. 1.1 – (a) Contact entre deux sphères élastiques soumises à une force normale  $F_N$  et une force tangentielle  $Q_T$ . (b) Représentation de l'aire du contact de rayon  $a$  illustrant le phénomène de "stick-slip".

Pour deux sphères élastiques de rayon  $R$  soumises à une force de compression  $F_N$ , le rayon  $a$  du cercle de contact et le déplacement relatif  $U^{(n)}$  des deux sphères s'écrivent [41] :

$$a = \left( \frac{3F_N R}{4E^*} \right)^{1/3}, \quad (1.1)$$

$$U^{(n)} = \frac{a^2}{R} = \left( \frac{9F_N^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3}, \quad (1.2)$$

avec  $E^* = E/2(1 - \nu^2)$ , où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson des matériaux en contact. La relation force/déplacement (1.2) est intrinsèquement non linéaire  $U^{(a)} \sim F_N^{2/3}$ , et il est alors possible de s'attendre à des effets importants de non-linéarités sur la propagation d'ondes de compression dans ce type de milieux. Dans le cadre de cette étude, la plupart des expériences d'acoustique est réalisée avec des billes de verre de rayon  $R = 1 \text{ mm}$ , de module d'Young  $E \simeq 65 \text{ GPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu \simeq 0.25$ . Pour le milieu granulaire non consolidé, la contrainte moyenne dans la configuration la plus utilisée est estimée à  $3 \text{ kPa}$ , soit une force normale moyenne entre deux billes de  $9,5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ . Pour cette valeur, le rayon de la surface de contact vaut  $a \simeq 6 \text{ }\mu\text{m}$  et le déplacement normal relatif entre sphères  $U^{(n)} \simeq 35 \text{ nm}$ . L'hypothèse de petite zone de contact par rapport au rayon de la sphère est respectée. La déformation associée à la zone de contact s'écrit comme le rapport du déplacement normal relatif entre sphères sur le rayon de celles-ci  $\varepsilon = U^{(n)}/2R$ . Cette déformation est de l'ordre de  $\varepsilon \simeq 1,7 \cdot 10^{-5}$ . Pour éviter la fracturation des grains, la fissuration ou tout autre phénomène irréversible, il faut se situer en-dessous du seuil de déformation plastique du verre. Ce seuil de plasticité correspond à une déformation proche de  $10^{-4}$ , ce qui assure l'intégrité des billes de verre.

### 1.2.2 Modèle de Hertz-Mindlin

La description de l'interaction entre deux sphères se complique en présence d'une force tangentielle  $Q_T$ . L'interaction élastique entre deux sphères a été étendue au cas d'une force oblique [61, 62], force décomposée en une composante normale et une tangentielle. Ce cas d'étude est illustré sur la figure 1.1(a). Cette composante tangentielle est à l'origine d'une déformation élastique à l'interface. Deux situations sont envisageables suivant l'amplitude de la force tangentielle : les sphères restent en contact sur la zone de rayon  $a$  ou alors il y a glissement au niveau du contact. C'est au 18<sup>ème</sup> siècle qu'Amontons et Coulomb ont posé les lois phénoménologiques du frottement. L'origine physique du frottement fait intervenir un ensemble très large de phénomènes : rugosité des surfaces, élasticité, adhésion, humidité, thermoélasticité, .... Un objet statique soumis à une force normale  $F_N$  et une force tangentielle  $Q_T$  ne se déplace pas tant que la force tangentielle respecte  $|Q_T| < \mu_s |F_N|$ , avec  $\mu_s$  le coefficient de friction statique. Si le solide est en mouvement, la force de traction nécessaire pour assurer un mouvement à vitesse constante est définie par  $|Q_T| = \mu_d |F_N|$ , avec  $\mu_d$  le coefficient de frottement dynamique. Ces coefficients de frottements  $\mu_s$  et  $\mu_d$ , introduits par Euler au milieu du 18<sup>ème</sup> siècle, respectent toujours  $\mu_d < \mu_s$ . Dans le cas sans glissement, c'est à dire  $|Q_T| < \mu_s |F_N|$ , la relation entre la force tangentielle  $Q_T$  et le déplacement tangentiel  $U^{(t)}$  s'écrit :

$$U^{(t)} = \frac{Q_T}{4a} \left( \frac{2 - \nu}{G} \right), \quad (1.3)$$

avec  $G$  le module de cisaillement du matériau constituant les billes. Cette relation force/déplacement tangentiel est linéaire.

Lorsque l'on tire sur un objet frottant par l'intermédiaire d'un ressort, le mouvement n'est pas toujours uniforme mais peut être saccadé (ou intermittent) : c'est le phénomène de "stick/slip"<sup>1</sup>, ou adhésion/microglissement. Ce mouvement comprend des périodes où l'objet résiste et ne bouge pas (adhésion ou "stick") et des périodes où le seuil de résistance est dépassé et l'objet glisse sur une certaine distance (glissement partiel ou "slip"). Les deux phases du mouvement reflètent deux états distincts du système : la phase statique qui est sous contrôle du frottement statique  $\mu_s$  entre l'objet et la surface, et la phase de glissement ("slip") qui correspond au mouvement de l'objet sous l'action d'un ressort. Pour les milieux granulaires, le phénomène de "stick/slip" se traduit par un contact entre deux sphères entouré d'un anneau où se produit le micro-glissement ("slip"), illustré sur la figure 1.1(b). Dans ce cas le déplacement tangentiel entre sphères s'écrit :

$$U^{(t)} = \frac{3\mu_s F_N}{8a} \left( \frac{2 - \nu}{G} \right) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{Q_T}{\mu_s F_N} \right)^{2/3} \right], \quad (1.4)$$

avec  $\mu_s$  le coefficient de friction statique du matériau constituant les billes. La relation entre déplacement tangentiel et force normale ou tangentielle est non linéaire et conduit à un comportement hystérétique selon le chargement du contact [41]. Les contacts exhibant du glissement peuvent alors être sources de non-linéarités de type hystérétique pour le milieu granulaire.

---

<sup>1</sup> Les termes stick et slip, décrivant respectivement les phénomènes d'adhésion et de microglissement, sont très utilisés en mécanique des contacts. Ces anglicismes seront utilisés dans la suite du document.



### 1.3 Modèle unidimensionnel de propagation acoustique : la chaîne de billes

Après l'introduction de la mécanique du contact entre deux sphères par la théorie de Hertz, il apparaît que la relation entre la force exercée entre deux billes et le déplacement relatif de celles-ci est non linéaire. Ce modèle de contact est la base de la description de la propagation d'ondes dans les milieux granulaires et des effets non linéaires attendus. Pour appréhender la propagation acoustique au sein de ces milieux, un système unidimensionnel ordonné est une modélisation simple d'un milieu granulaire réel. Mais le caractère simplifié de cette modélisation permet tout de même la compréhension par des approches analytiques de l'influence du caractère discret d'un milieu granulaire et des effets de la pression statique.

En respectant les hypothèses de la théorie de Hertz, c'est-à-dire des contraintes localisées au niveau du contact et des petites déformations, il est possible de modéliser une chaîne de billes sous précontrainte par une chaîne de masses ponctuelles reliées par des ressorts non linéaires de raideur  $K$  obéissant à la théorie de Hertz. Les fréquences considérées doivent être très inférieures à la fréquence de résonance d'une bille (onde de volume dans le matériau), mais les longueurs d'ondes acoustiques dans la chaîne de bille peuvent être comparables à la distance entre particules. Les fréquences acoustiques sont alors petites devant les modes de vibrations d'une bille, assurant des phénomènes quasi-statiques au niveau des contacts. Cette analogie est représentée sur la figure 1.2.

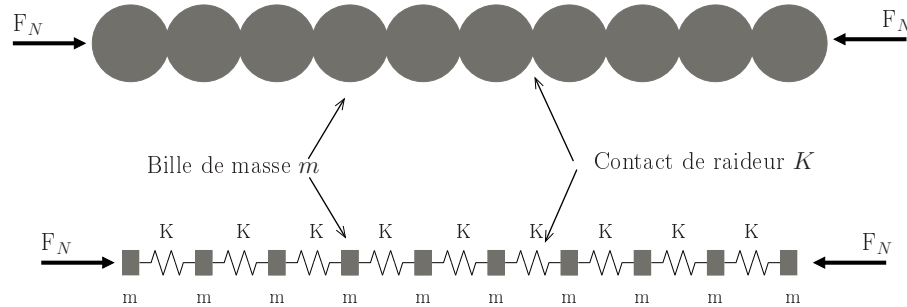


FIG. 1.2 – Chaîne unidimensionnelle de billes soumise à une force de compression  $N$  et son réseau équivalent masses-ressorts en approximation quasi-statique.

En l'absence de dissipation, la dynamique de la chaîne est décrite par une équation différentielle non linéaire [15] :

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} = \frac{\sqrt{2RE}}{3m(1-\nu^2)} [(\delta_0 - (U_n - U_{n-1}))^{3/2} - (\delta_0 - (U_{n+1} - U_n))^{3/2}], \quad (1.5)$$

avec  $U_n$  le déplacement de la bille  $n$  par rapport à sa position d'équilibre et  $\delta_0$  la variation de distance entre les deux centres de sphères adjacentes soumises à une force normale  $F_N$  par rapport à la distance sans force  $2R$ .

### 1.3.1 Relation de dispersion

Pour de faibles déformations acoustiques, l'équation (1.5) est linéarisée dans la limite  $|U_n - U_{n_1}| \ll \delta_0$  et les contacts sont représentés par des raideurs  $K_0$  de valeur

$$K_0 = \frac{3}{4}(RF_N)^{1/3} \left( \frac{4E}{3(1-\nu^2)} \right)^{2/3}. \quad (1.6)$$

Le problème se résume maintenant à une chaîne de masses ponctuelles reliées par des raideurs identiques linéaires, c'est-à-dire ne dépendant pas des paramètres de l'onde. En introduisant un déplacement de la forme  $U_n = Ae^{i\omega t - 2kRn}$  pour une onde acoustique de pulsation  $\omega$  et de nombre d'onde  $k$  dans l'équation (1.5), la relation de dispersion dans l'approximation linéaire est obtenue

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K_0}{m}} |\sin(kR)|. \quad (1.7)$$

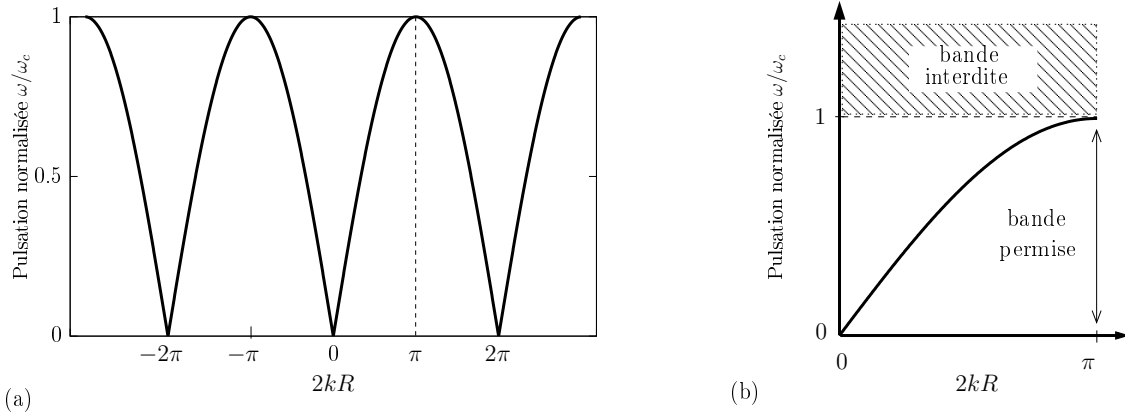


FIG. 1.3 – (a) Courbe de dispersion  $\omega = \omega(k)$  de la chaîne unidimensionnelle de billes. (b) Courbe de dispersion limitée à la première zone de Brillouin  $0 \leq 2kR \leq \pi$ . La fréquence de coupure  $\omega/\omega_c = 1$  délimite la bande de pulsation des ondes propagatives et la bande interdite où les modes acoustiques sont évanescents.

La fonction  $\omega = \omega(k)$  est périodique, compte tenu de la périodicité de l'équation (1.7). La courbe de dispersion peut alors être limitée aux nombres d'ondes  $k$  compris entre 0 et  $\pi/2R$  (voir la figure 1.3(b)). Limiter le nombre d'onde  $k$  sur cet intervalle consiste à se placer dans la première zone de Brillouin du réseau réciproque du système périodique considéré [11]. A partir de l'équation (1.7), les pulsations permises pour la propagation d'ondes acoustiques dans le réseau unidimensionnel sont inférieures à la pulsation de coupure

$$\omega_c = 2\sqrt{\frac{K_0}{m}}, \quad (1.8)$$

qui est la pulsation maximale au delà de laquelle les modes propagatifs deviennent évanescents. Pour ce système unidimensionnel périodique, une bande interdite pour la propagation d'ondes existe pour les pulsations  $\omega > \omega_c$ . Ce comportement bien connu de la propagation d'ondes dans des milieux périodiques

unidimensionnels servira de base à l'étude de la propagation d'ondes dans un milieu granulaire cubique réalisée au chapitre 4.

En reportant la raideur des contacts (1.6) dans la pulsation de coupure (1.8), la fréquence de coupure de la chaîne exprimée en fonction des paramètres du réseau est obtenue [16]

$$f_c = \frac{3F_N^{1/6}}{4\pi^{3/2}\rho^{1/2}R^{4/3}} \left( \frac{4E}{3(1-\nu^2)} \right)^{1/3}, \quad (1.9)$$

avec  $\rho$  la masse volumique de chaque bille. Pour  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$  et les paramètres utilisés précédemment ( $E \simeq 65 \text{ GPa}$ ,  $\nu \simeq 0.25$ ,  $R = 1 \text{ mm}$ ,  $F_N = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ ), la fréquence de coupure estimée pour une chaîne de billes dans notre configuration est de l'ordre de  $50 \text{ kHz}$ . La courbe de dispersion, tracée sur la figure 1.3(b), donne une information supplémentaire sur la vitesse de phase de l'onde acoustique  $c_\phi = \omega/k$  et la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes  $c_g = \partial\omega/\partial k$ . Dans la limite basse fréquence  $\omega/\omega_c \ll 1$ , les vitesses de phase et de groupe sont égales

$$c_\phi \simeq c_g \simeq \frac{3F_N^{1/6}}{2\sqrt{\pi}\rho R^{1/3}} \left( \frac{4E}{3(1-\nu^2)} \right)^{1/3}, \quad (1.10)$$

et dépendent de la force de compression de la chaîne comme  $N^{1/6}$ . Cette dépendance de la vitesse des ondes en puissance 1/6 de la force appliquée a été retrouvée expérimentalement [16] pour des chaînes de billes de diamètres identiques. Lorsque la pulsation  $\omega$  tend vers la pulsation de coupure  $\omega_c$ , la pente de la courbe de dispersion s'annule et la vitesse de groupe tend vers 0. L'énergie ne se propage plus dans la chaîne, les modes deviennent évanescents. Pour des fréquences acoustiques très supérieures à la fréquence de coupure  $f_c$  de la chaîne de billes (typiquement  $f \simeq 10f_c$ ), les longueurs d'ondes acoustiques des modes de volume des billes sont comparables au diamètre d'une bille. Les modes de vibrations radiales d'une bille apparaissent ainsi que des ondes de surface de Rayleigh [18]. Ce travail se situe dans des gammes de fréquences où ces modes ne peuvent pas apparaître.

### 1.3.2 Ondes non linéaires et solitons

La relation de dispersion (1.7) est obtenue par approximation linéaire, donc pour de faibles amplitudes acoustiques. Un cas limite intéressant de cette approximation est la cas où la force de compression de la chaîne est nulle  $F_N = 0$ . Dans ce cas, les contacts ne sont plus précontraints et le passage d'ondes acoustiques de très faible amplitude entraîne irrémédiablement l'ouverture des contacts. Les ondes acoustiques purement linéaires ne peuvent plus se propager dans la chaîne de billes. Ce phénomène a été appelé "vide sonique" [65] et seule une propagation non linéaire des ondes peut se produire. L'étude de la propagation d'ondes non linéaires dans un réseau unidimensionnel de billes sous contrainte a été étudié théoriquement, numériquement [65] et expérimentalement [50]. La limite fortement non linéaire (ou fortement anharmonique) de l'équation (1.5) correspond à  $|U_n - U_{n-1}| \gg \delta_0$  et se réfère à des excitations acoustiques d'amplitudes très supérieures à la force statique  $N$  appliquée sur la chaîne. Dans la limite continue où la taille caractéristique des perturbations est très supérieure au rayon des billes, l'existence d'ondes non linéaires particulières a été prédite [65]. Ces ondes se propagent

en conservant leur forme sur une distance de propagation grande devant leur taille, sont supersoniques (se propagent à une vitesse supérieure à la vitesse du son dans la chaîne de billes). Ces ondes non linéaires sont appelées des solitons.

## 1.4 Propriétés et problèmes actuels des milieux granulaires non consolidés

L'ensemble des résultats présentés sur la mécanique des contacts et la propagation acoustique dans une chaîne de billes fournit des éléments de compréhension sur les phénomènes plus complexes qui apparaissent dans les milieux granulaires réels tridimensionnels. Tout d'abord, l'étude du modèle de Hertz-Mindlin a mis en évidence le caractère non linéaire à l'échelle microscopique du contact entre deux sphères, ainsi que la possibilité de glissement au niveau des contacts. Une chaîne unidimensionnelle de sphères obéissant à la loi de Hertz a ensuite montré l'existence d'une fréquence de coupure pour la propagation d'ondes acoustiques au sein de la chaîne et d'ondes non linéaires (solitons) se propageant dans le réseau. Il est alors attendu qu'un milieu granulaire réel tridimensionnel présente des phénomènes non linéaires par extension du modèle microscopique de Hertz à l'échelle macroscopique de l'empilement. Tout d'abord, différents assemblages granulaires sont présentés ainsi que l'effet du fluide environnant les grains. La statique d'un empilement granulaire aléatoire est abordée en présentant le désordre inhérent à une telle structure. Les non-linéarités acoustiques susceptibles d'apparaître dans ces milieux sont présentées, avant un exposé non exhaustif des enjeux et problèmes actuels de la compréhension physique de ces milieux.

### 1.4.1 Effets du fluide environnant

Un milieu granulaire est composé de grains mais aussi d'un fluide saturant ces grains. Dans cette étude ce fluide saturant est l'air. Il est alors important d'identifier l'influence de ce fluide sur le comportement de l'empilement granulaire. En effet, une excitation acoustique transmise par des transducteurs se propage à la fois dans les grains et dans le fluide. Un couplage entre les modes solidiens (où l'énergie est transmise à travers les grains) et les modes aériens (où l'énergie est transmise à travers le fluide saturant) peut apparaître. Cependant ce couplage peut s'avérer très peu efficace et n'affecter que faiblement la propagation acoustique. La présence d'un fluide ou d'un gaz dans les interstices du milieu se traduit par un amortissement dû à la viscosité du fluide (ou du gaz), donc par une perte d'énergie due aux frottements visqueux. Il est possible de quantifier l'importance de ces forces de viscosité par rapport à l'énergie cinétique ou potentielle pour une particule, à l'aide d'un nombre de Reynolds effectif [20]

$$R_e \sim \frac{\rho}{\eta} Rv, \quad (1.11)$$

avec  $\rho$  la masse volumique des particules de rayon  $R$ , et  $v$  la vitesse dans le fluide de viscosité  $\eta$ . Ce nombre de Reynolds représente le rapport de l'énergie cinétique d'une particule sur le travail de la force visqueuse pour une longueur caractéristique équivalente au rayon d'une sphère. Pour des grains

millimétriques utilisés dans cette étude, quantifions à l'aide de ce rapport les interactions particule-fluide dans le cas de l'eau et de l'air. Pour des valeurs typiques de déformation  $\varepsilon \simeq 10^{-5}$  et de vitesse des ondes  $c \simeq 2 \cdot 10^{-2}$  dans nos expériences, la vitesse d'une particule est estimée à  $v = \varepsilon c \simeq 2 \cdot 10^{-3}$  m/s. Un calcul approché du nombre de Reynolds dans l'eau (de viscosité  $\eta \simeq 10^{-3}$ ), pour des grains de diamètre 2 mm en verre (soit  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup>) dotés d'une vitesse  $v \simeq 2 \cdot 10^{-3}$  m/s, donne  $R \simeq 5$ . L'énergie perdue par frottements est alors du même ordre que l'énergie cinétique de la particule. Dans l'air (avec  $\eta_{eau} \simeq 10^2 \eta_{air}$ ), l'énergie cinétique est  $10^4$  supérieure aux frottements visqueux, et les interactions particule-fluide sont alors considérées comme négligeables.

### 1.4.2 Géométrie des assemblages granulaires

Une manière simple pour obtenir un empilement granulaire est de verser des grains dans un récipient. Nous restreindrons la description de ces assemblages aux empilements de sphères de même diamètre. Sans précaution particulière, l'empilement produit sera aléatoire, c'est à dire qu'aucun ordre à grande échelle (relativement au diamètre d'un grain) existe. Si au contraire la disposition des grains est contrôlable, il est possible de créer des arrangements granulaires réguliers.

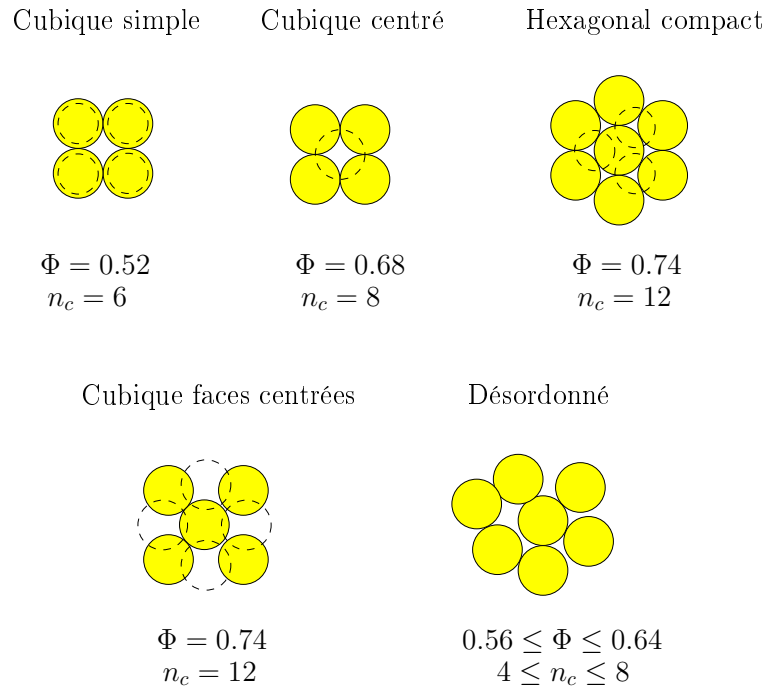


FIG. 1.4 – Représentation des différents assemblages granulaires réguliers et désordonné ainsi que leurs propriétés géométriques associées.

Il est aussi possible de réaliser naturellement de tels cristaux granulaires (cristaux colloïdaux, opales synthétiques). Ces arrangements réguliers (cubique simple, cubique centré, cubique faces centrées et hexagonal compact) possèdent un ordre à courte distance, ce qui assure une répartition des contraintes

homogènes au sein du milieu sous l'action d'une contrainte isotrope. Dans le cas idéal, chaque contact sera ainsi chargé de manière égale. Pour comprendre les propriétés des matériaux granulaires et le rôle des vides entre les grains, la compacité et la coordinence (ou nombre de coordination  $n_c$ ) du milieu sont des paramètres parmi les plus utilisés. La compacité du milieu est le rapport du volume occupé par les billes au volume total ; le nombre de coordination est le nombre de contacts d'une bille avec ses voisines. Le nombre de contacts d'une bille avec ses voisines permet une mesure topologique simple de l'empilement, sur sa stabilité et sa cohésion (résistance). Les premières études sur la stabilité de ces structures ont été réalisées par Lagrange et Maxwell, avec comme hypothèse l'équilibre entre le nombre de degrés de liberté du système et le nombre de contraintes. Considérons par exemple  $N$  billes de taille identique sous arrangement cubique. Il faut compter  $3N$  degrés de liberté (pour 3 translations) et  $\frac{n_c}{2}N$  contraintes (une force normale par billes, partagée entre deux billes). L'équilibre statique impose  $n_c = 6$ , qui est le nombre de contacts par billes pour l'arrangement cubique simple. Les valeurs de compacité et de nombre de coordination pour les quatre assemblages réguliers ainsi que l'assemblage désordonné sont présentées sur la figure 1.4. Il est à noter que les assemblages cubiques faces centrées et hexagonal possèdent une compacité de 74% et un nombre de coordination de 12, qui sont les valeurs les plus élevées pour des empilements de sphères de même diamètre. Nous reviendrons plus en détail dans le chapitre 2 sur les valeurs de compacités des empilements aléatoires.

### 1.4.3 Désordre des empilements granulaires

En versant un sac de billes dans un récipient, l'empilement créé est désordonné. Ce milieu granulaire s'écarte des réseaux granulaires réguliers étudiés auparavant par une répartition de forces inhomogène au sein du de l'empilement. Lorsqu'une contrainte est appliquée sur la surface supérieure d'un empilement, la distribution des contraintes au sein du milieu est fortement inhomogène. En éclairant un système bidimensionnel de grains entre deux polariseurs croisés [86], il est possible d'observer des réseaux de fortes contraintes sur une longueur de quelques billes. Ce sont les chaînes de force, ou "voûtes". Au contraire il existe des régions de l'empilement dans lesquelles les grains sont très peu contraints. Ainsi certains grains ne sont presque pas sous contrainte, alors que d'autres supportent une majeure partie de la charge appliquée. Les contacts supportant une grande partie de la contrainte seront dorénavant nommés contacts forts, tandis que les contacts peu contraints jouant le rôle de spectateurs seront appelés contacts faibles. Des simulations numériques [74] permettent de retrouver le comportement d'un empilement statique et la répartition entre des contacts forts et faibles. L'orientation des contacts faibles est alors isotrope pour un arrangement bidimensionnel de disques, et celle des contacts forts correspond à la direction des voûtes. Dans une configuration verticale où seule la gravité contraint l'empilement, le réseau de contraintes est orienté verticalement [24]. La figure 1.5(a) illustre cette caractéristique des milieux granulaires désordonnés.

Il apparaît dès lors qu'une compréhension des phénomènes physiques se déroulant dans un milieu granulaire ne peut être dissociée de la connaissance de la répartition des forces entre contacts au sein du milieu. Il s'avère ainsi nécessaire de connaître la distribution de contacts, qui représente le nombre de contacts dans le milieu en fonction de leur déformation statique (ou la contrainte statique). Dans la

suite, la déformation statique des contacts est normalisée par rapport à la déformation statique moyenne  $\varepsilon_0$  et sera caractérisée par le paramètre  $\nu = \varepsilon_{\text{contact}}/\varepsilon_0$ . La forme de cette distribution de contacts est principalement accessible expérimentalement pour les fortes déformations statiques et donc pour les contacts forts. Une méthode de mesure est la détection au papier carbone [63, 54] de traces laissées par les billes sur les parois du récipient, traces dont la surface est liée à la force statique des contacts. Cette méthode, relativement précise pour les forces de grande amplitude, montre que la distribution de force suit une loi de type exponentiel. D'autres expériences, par photoélasticimétrie [36] par exemple, ont confirmé ce résultat mais en général [24], ces méthodes ne peuvent permettre de mesures fiables pour des déformations statiques normalisées inférieures à  $\nu = 0.1$ . Les simulations numériques [75, 74] ont également été réalisées et permettent, contrairement aux expériences, d'accéder à la distribution des petites forces statiques. Dans ces simulations, le nombre de contacts faibles est légèrement supérieur au nombre de contacts forts qui ne représentent que 40% des contacts dans le milieu.

Pour résumer, la distribution de déformations de contacts est bien établie pour les grandes déformations statiques et est caractérisée par une loi exponentielle :

$$n(\nu) = e^{-\alpha_1(\nu-1)^{\alpha_2}} \quad \nu \geq 1, \quad (1.12)$$

avec les valeurs des constantes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  proches de l'unité. La figure 1.5 représente l'allure de différentes distributions de déformations de contacts pour les faibles déformations statiques. Il reste encore à établir le comportement de cette distribution aux faibles déformations statiques : plateau, divergence ou distribution qui tend vers zéro.

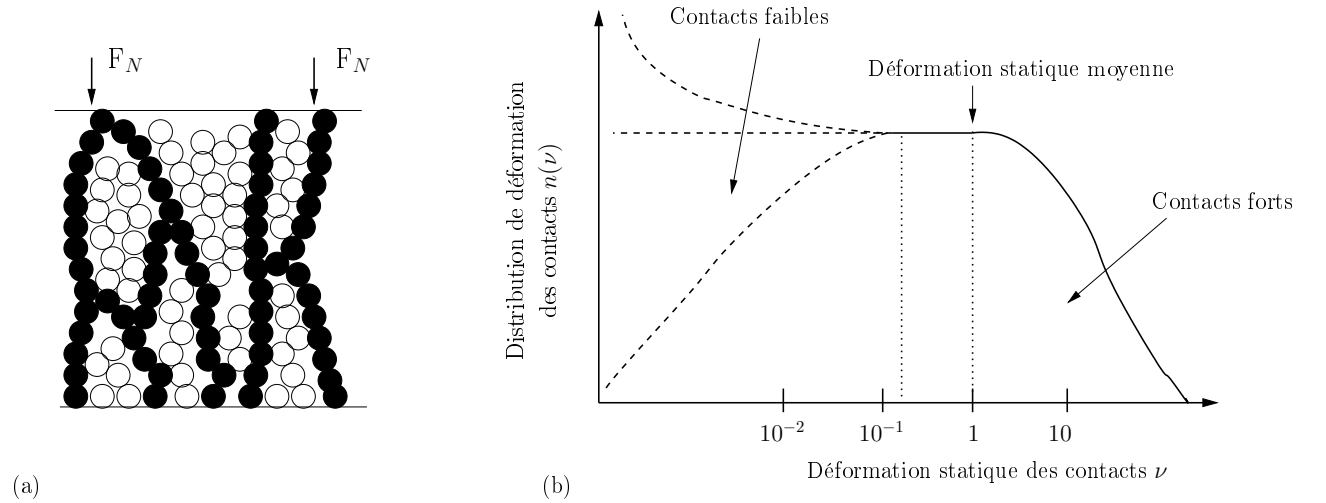


FIG. 1.5 – (a) Représentation du réseau de chaînes de force dans un empilement granulaire sous contrainte statique uniaxiale. (b) Distribution de déformations de contacts. Pour  $\nu > 1$ , la distribution est bien modélisée dans la littérature ; pour  $\nu < 1$ , différentes distributions de contacts faibles sont proposées mais non accessibles expérimentalement.

Ces notions de chaînes de force et contacts forts ou faibles sont les notions clés de la compréhension

de la propagation des contraintes dans les matériaux granulaires dont une illustration (à enjeux industriels) est le cas du silo abordé ci-dessous.

#### 1.4.4 Le silo à grains

Une expérience classique [14] pour caractériser l'effet des voûtes au sein d'un empilement granulaire est illustrée sur la figure 1.6. Un récipient (le silo) est rempli avec une masse  $M_v$  de grains. Si le fond du récipient est indépendant des parois, alors la masse mesurée au fond du récipient est la masse apparente de l'empilement. La même expérience dans un fluide montrerait une égalité de ces deux masses, c'est-à-dire une contrainte statique linéairement dépendante de la profondeur  $z$  dans le récipient. Cependant, en versant des grains, il apparaît que la masse apparente mesurée n'est qu'une fraction de la masse versée. Tout le poids des grains ne repose pas sur le fond. Par conséquent une partie du poids des grains est supporté par les parois. À partir d'une hauteur d'empilement égale au diamètre du récipient, les grains s'organisent de façon à former des chaînes de contraintes orientées vers les parois du récipient. Les contraintes verticales sont alors principalement supportées par friction au niveau des parois [14].

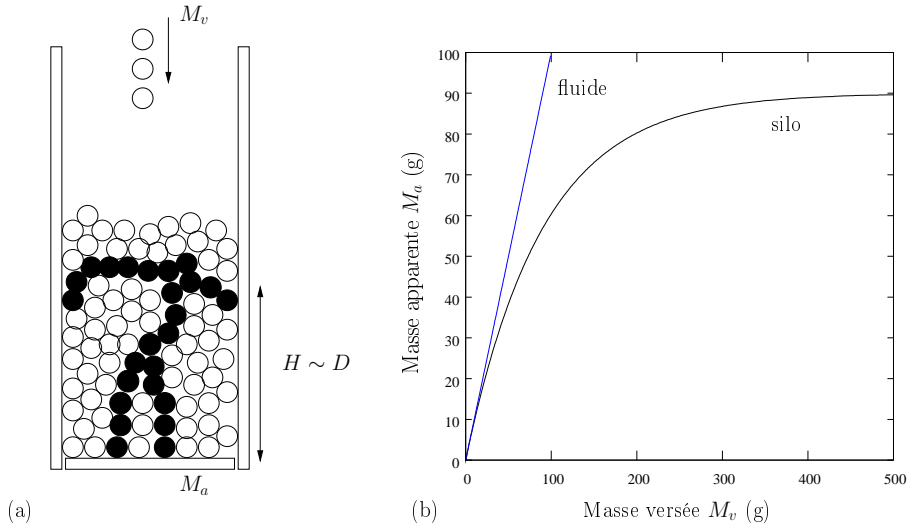


FIG. 1.6 – (a) Illustration du problème du silo à grains par mesure de la masse apparente des grains à la base du récipient. (b) Déviation de la masse mesurée sur le fond par rapport au modèle fluide.

Un modèle, largement utilisé dans la littérature, décrivant la propagation des contraintes dans un récipient est le modèle de Janssen [14]. Pour décrire l'évolution de la masse apparente en fonction de la masse versée, ce modèle considère des contraintes indépendantes de la position horizontale et uniquement fonction de la profondeur  $z$ . La prise en compte de la friction aux parois est supposée pleinement mobilisée. La contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  est déterminée par la relation de friction aux parois  $\sigma_{xz} = \tan(\phi)\sigma_{xx}$ , avec  $\phi$  l'angle de friction entre les grains et les parois. Enfin, les contraintes horizontales sont supposées proportionnelles aux contraintes verticales par un facteur de proportionnalité  $K$  appelé constante de Janssen. L'équilibre des forces sur une tranche  $\Delta z$  de masse



$M_c = \rho A \Delta z$ , où  $A$  est l'aire de la surface horizontale et  $\rho$  la masse volumique des grains, permet d'obtenir la relation

$$M_a = M_\infty [1 - e^{-\frac{M_v}{M_\infty}}], \quad (1.13)$$

avec  $M_\infty$  la masse vers laquelle tend la masse apparente lorsque la masse versée est grande. Cette masse limite est de la forme  $M_\infty = M_c / \alpha K \tan(\phi)$ , avec  $\alpha$  un facteur de dimensionalité.

Pour résumer, les milieux granulaires exhibent des comportements particuliers, qu'ils soient géométriques (désordre géométrique des contacts) ou en rapport avec la propagation des contraintes (chaînes de force, distribution de déformations de contacts). L'étude d'un empilement granulaire dans un récipient, identique au modèle de Janssen présenté ci-dessus, est la base de la compréhension de la statique de ces milieux. Les mesures acoustiques permettent d'obtenir, entre autres, des informations sur l'élasticité du milieu sondé. Puisque le milieu granulaire est composé de contacts (obéissant à la théorie de Hertz) distribués sur une large gamme de déformations statiques, il est attendu une forte non-linéarité acoustique en comparaison des solides homogènes classiques. Nous discutons dans cette section des différentes non-linéarités susceptibles d'apparaître au sein de ces milieux.

#### 1.4.5 Les non-linéarités acoustiques

Les milieux granulaires présentent des caractéristiques non linéaires particulières qui ne peuvent pas s'expliquer par la théorie classique de non-linéarité atomique [31]. Les milieux granulaires doivent ces comportements à la présence d'inclusions molles dans une matrice plus rigide. Il a été discuté de la distribution de contacts au sein de ces milieux, avec la présence de contacts forts et de contacts faibles, jouant le rôle de spectateurs pour la propagation des contraintes. Ces contacts faibles, de déformation statique inférieure à la déformation statique moyenne des contacts du milieu, sont le siège de fortes déformations sous l'application d'une contrainte (acoustique par exemple). Ce sont ces inclusions molles qui créent la déviation du comportement élastique linéaire de la matrice rigide composée des contacts forts. La non-linéarité induite par ces inclusions molles, souvent caractérisée par le paramètre de non-linéarité quadratique  $\beta$ , peut être  $10^3$  à  $10^4$  fois supérieure à celle observée dans les milieux homogènes (comme l'air).

Pour expliquer simplement l'origine de cette forte non-linéarité, un modèle unidimensionnel comprenant des inclusions molles [5, 89] a été développé. Le modèle unidimensionnel masse-ressort équivalent au réseau de billes a déjà été étudié dans ce chapitre. Pour analyser l'effet des contacts faibles sur la propagation acoustique et les non-linéarités du milieu, des raideurs faibles  $K_i$  (très inférieures à celles de la matrice rigide constituée de contacts forts de raideur  $K$ ) ont été introduites avec une densité linéique  $\nu_m$ . Ce modèle est illustré sur la figure 1.7.

Les raideurs faibles introduites sont petites par rapport aux raideurs des contacts forts, soit  $K_i = \mu K$  avec  $\mu \ll 1$ . Dans le cas de faible non-linéarité, la relation contrainte/déformation des inclusions souples peut s'écrire :

$$\sigma = E_i \varepsilon (1 + \sum_n \Gamma_n \varepsilon^{n-1}), \quad (1.14)$$

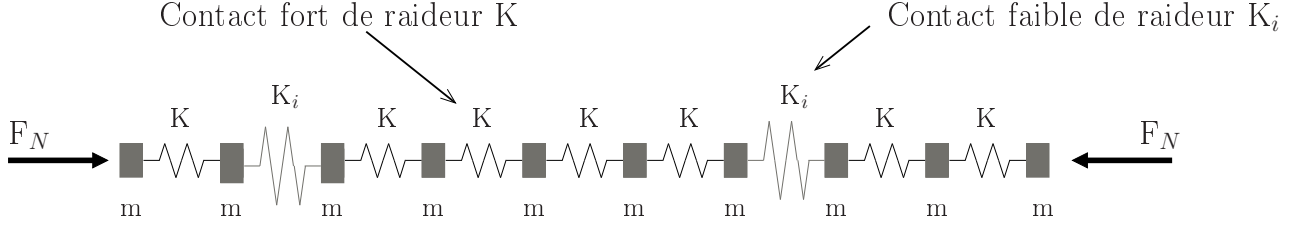


FIG. 1.7 – Modèle unidimensionnel masse-ressort avec prise en compte d'inclusions molles de raideur  $K_i = \mu K$ .

avec  $E_i$  le module d'élasticité de l'inclusion et  $\Gamma_n$  le coefficient de non-linéarité d'ordre  $n$ . Pour les contacts forts, la relation contrainte/déformation est de la forme

$$\sigma = E\varepsilon(1 + \sum_n \Gamma_n \varepsilon^{n-1}), \quad (1.15)$$

avec  $E$  le module d'élasticité des contacts forts. Après calcul, il est possible de montrer [5, 89] que le module élastique moyen  $E_{moy}$  vaut  $E_{moy} = \alpha_E E$  avec

$$\alpha_E = (1 + \nu_m/\mu)^{-1}, \quad (1.16)$$

et que le coefficient de non-linéarité moyen d'ordre  $n$   $\Gamma_{n,moy}$  vaut  $\Gamma_{n,moy} = \alpha_\Gamma \Gamma_n$  avec

$$\alpha_\Gamma = \frac{1 + \nu_m/\mu^n}{(1 + \nu_m/\mu)^n}. \quad (1.17)$$

Le coefficient  $\alpha_E$  représente l'écart du module d'élasticité linéaire en présence d'inclusions au module élastique linéaire du milieu homogène. Le coefficient  $\alpha_\Gamma$  est l'écart de la non-linéarité d'ordre  $n$  en présence d'inclusions à la non-linéarité classique du milieu homogène. Les équations (1.16) et (1.17) indiquent que le paramètre de non-linéarité  $\alpha_\Gamma$  augmente très rapidement en présence d'une densité suffisante d'inclusions molles, jusque  $\nu_m \simeq \mu$ , alors que le paramètre élastique  $\alpha_E$  reste relativement constant. Par exemple, pour les valeurs  $\nu_m = 10^{-1}$  et  $\mu = 10^{-4}$ , les paramètres linéaire et non linéaire (d'ordre 1) valent  $\alpha_E \simeq 1$  et  $\alpha_\Gamma \simeq 10^3$ . Ce modèle simple permet de comprendre la grande sensibilité des méthodes non linéaires (sensibles aux coefficients non linéaires  $\Gamma_n$ ) par rapport aux méthodes linéaires (sensibles au module élastique linéaire du milieu) même pour une densité faible de contacts faibles. Lorsque le nombre d'inclusions molles est très important  $\nu_m \simeq 1$ , le paramètre de non-linéarité  $\alpha_\Gamma$  chute et les méthodes linéaires sont plus sensibles pour détecter la faible densité d'inclusions molles que les méthodes non linéaires.

Ce modèle phénoménologique a permis de comprendre le fort potentiel et la sensibilité des méthodes d'acoustique non linéaire à la caractérisation des milieux complexes comprenant des inclusions souples (contacts faibles, fissures). Les manifestations non linéaires peuvent cependant être d'origines diverses. Le contact de Hertz, étudié en début de chapitre, joue un rôle non négligeable dans ces non-linéarités.

A cela s'ajoute la possibilité de glissement des contacts dans le modèle de Hertz-Mindlin. Si la déformation statique entre deux contacts est faible devant l'amplitude de la déformation acoustique, l'onde peut ouvrir le contact. Ce phénomène est le clappement (ouverture/fermeture des contacts), et il est à l'origine d'une non-linéarité particulière [85]. Les phénomènes hystérétiques ont aussi été abordés. La richesse des comportements au sein d'un milieu granulaire et leur manifestation rendent difficiles l'interprétation des phénomènes acoustiques observés. Cette large gamme de non-linéarités, illustrée sur la figure 1.8, est discutée.

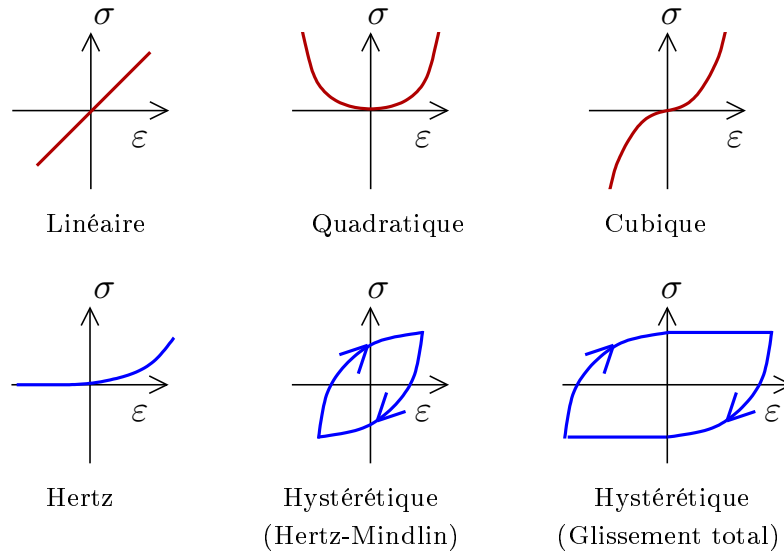


FIG. 1.8 – Représentation des possibles non-linéarités du milieu granulaire dans le plan contrainte/déformation.

Dans la théorie non linéaire classique (non-linéarité atomique), les non-linéarités sont faibles et causent une faible déviation par rapport à la loi linéaire de Hooke  $\sigma = f(\varepsilon)$ . Pour une perturbation acoustique  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_A \cos \omega t$  faible devant la déformation statique  $\varepsilon_0$ , il est possible d'effectuer un développement de Taylor en puissances successives de la perturbation  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon_0$  dans un cas unidimensionnel

$$\tilde{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_0)\tilde{\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_0)\tilde{\varepsilon}^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon^3}(\varepsilon_0)\tilde{\varepsilon}^3 + \dots, \quad (1.18)$$

avec  $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0$  la perturbation sur la contrainte. Cette relation d'état, dans le cas de variations douces de la fonction  $f$ , est souvent introduite sous la forme

$$\tilde{\sigma} = E(\tilde{\varepsilon} + \beta\tilde{\varepsilon}^2 + \delta\tilde{\varepsilon}^3 + \dots), \quad (1.19)$$

avec  $E$  le module élastique linéaire, et  $\beta$  et  $\delta$  les coefficients non linéaires quadratiques et cubiques. Une application de ce développement en puissances successives est typiquement la loi

contrainte/déformation de Hertz sans clappement. En effet, la relation  $\sigma = f(\varepsilon)$  de Hertz en puissance  $3/2$  est

$$\sigma = \tilde{\sigma} + \sigma_0 = C(\tilde{\varepsilon} + \varepsilon_0)^{3/2}, \quad (1.20)$$

avec  $C$  une constante dépendant des paramètres mécaniques du milieu. Ici, par convention, une compression correspond à  $\sigma > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour une excitation acoustique faible devant la déformation statique des contacts  $\tilde{\varepsilon} \ll \varepsilon_0$ , il n'y a pas d'ouverture du contact et la relation contrainte/déformation peut être développée en série de Taylor uniquement pour la partie dynamique de la contrainte avec le petit paramètre  $\tilde{\varepsilon}$

$$\tilde{\sigma} = \frac{3}{2}C\varepsilon_0^{1/2}\tilde{\varepsilon}\left[1 + \frac{1}{4\varepsilon_0}\tilde{\varepsilon} + \dots\right]. \quad (1.21)$$

L'analogie de la relation (1.21) avec le développement classique en non-linéarités de puissances successives (1.19) permet d'identifier les paramètres de non-linéarités quadratiques et cubiques des contacts de Hertz précontraints. Le paramètre non linéaire quadratique de Hertz  $\beta = \frac{1}{4\varepsilon_0}$  est inversement proportionnel à la déformation statique moyenne des contacts. Par le même raisonnement, le paramètre de non-linéarité cubique de Hertz  $\delta \simeq \frac{1}{\varepsilon_0^2}$  est inversement proportionnel au carré de la déformation statique moyenne des contacts. Ainsi, moins le contact est comprimé, plus il se comporte de façon non linéaire (toujours dans la limite  $\varepsilon \ll \varepsilon_0$ ).

Cette approche montre que pour les non-linéarités douces (quadratiques, cubiques, Hertz sans clappement), il est possible d'appliquer la méthodes des approximations successives et d'identifier les paramètres non linéaires associés à un phénomène physique. Le développement non linéaire en puissance successives permet, par exemple, d'expliquer le processus du mélange de fréquences en cascade. Lorsque deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  sont émises dans un milieu comprenant une non-linéarité douce, la première interaction non linéaire crée les fréquences  $2f_1$ ,  $2f_2$ ,  $f_1 + f_2$ ,  $f_1 - f_2$ ,  $f_1 - f_1$  et  $f_2 - f_2$  au premier ordre de mélange. Au deuxième ordre, les différentes fréquences contenues dans le spectre interagissent à nouveau pour créer un spectre fréquentiel encore plus riche. Cette situation peut être différente en présence de non-linéarité comportant des points singuliers.

Par exemple, une non-linéarité de Hertz avec ouverture du contact (clappement) correspond à une perturbation acoustique  $\tilde{\varepsilon}_A$  supérieure à la déformation statique moyenne  $\varepsilon_0$  du contact. La relation contrainte/déformation de Hertz (1.20) comprend alors une fonction de Heaviside pour prendre en compte l'ouverture et la fermeture du contact. La distribution statistique de contacts existant au sein du milieu peut aussi être introduite par une fonction  $\Psi(\nu)$ , où  $\nu$  est le rapport de la déformation statique du contact considéré sur la déformation statique moyenne. La relation contrainte/déformation de Hertz avec clappement et prise en compte de la distribution de contacts s'écrit

$$\sigma = \tilde{\sigma} + \sigma_0 = C \int_0^{+\infty} \Psi(\nu)(\tilde{\varepsilon} + \nu\varepsilon_0)^{3/2} H(\tilde{\varepsilon} + \nu\varepsilon_0) d\nu. \quad (1.22)$$

Les implications d'une relation d'état du milieu avec singularités, comme la relation (1.22) induit des phénomènes non linéaires particuliers sur la propagation acoustique. Le cas particulier de la prise en

compte du phénomène de Hertz avec clappement sur le processus de mélange de fréquences sera traité dans le chapitre 3.

Lorsque la relation contrainte/déformation du milieu  $\sigma = f(\varepsilon)$  (ou ses dérivées supérieures en déformation) comporte des singularités, il n'est plus possible d'effectuer un développement de Taylor de cette relation. C'est le cas, entre autres, des relations contrainte/déformation hystérétiques et de Hertz avec clappement, illustrées sur la figure 1.8. La relation est bi-évaluée, c'est-à-dire que le comportement élastique est différent en fonction de la contrainte appliquée et de son sens de variation. Le comportement élastique, représenté par le module d'Young  $E = \partial\sigma/\partial\varepsilon$  en fonction de la déformation  $\varepsilon$ , pour les différentes relations contrainte/déformation discutées, est représenté sur la figure 1.9. La contrainte dépend alors de la déformation  $\varepsilon$ , de son sens de variation  $\text{sgn}(\dot{\varepsilon})$  et de l'amplitude de déformation acoustique maximale  $\varepsilon_a$

$$\tilde{\sigma} = E(\tilde{\varepsilon} + \beta\tilde{\varepsilon}^2 + \delta\tilde{\varepsilon}^3 + \dots) + F(\varepsilon, \text{sign}(\dot{\varepsilon}), \varepsilon_a), \quad (1.23)$$

avec  $F$  une fonction décrivant les effets non linéaires non classiques (hystérétiques par exemple).

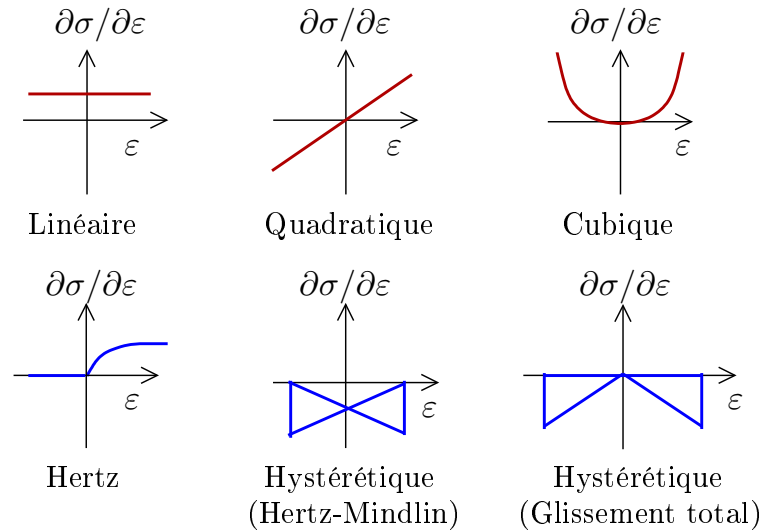


FIG. 1.9 – Module d'Young instantané  $E = \partial\sigma/\partial\varepsilon$  pour les différentes non-linéarités susceptibles d'apparaître au sein du milieu granulaire.

La relation non linéaire hystérétique (1.23) décrit différents mécanismes hystérétiques, chacun avec une représentation différente dans le plan contrainte/déformation. Sur la figure 1.8, le modèle hystérétique classique et un modèle hystérétique avec glissement au niveau du contact sont représentés. Chaque contact participe par son comportement élastique à l'hystérésis de la relation (1.23) et le milieu peut être décrit par son espace de Preysach-Mayergoyz [35, 30]. Ce modèle est basé sur l'hypothèse que les propriétés élastiques d'un milieu (au niveau macroscopique) résultent de la réponse totale d'éléments élastiques individuels, chaque élément pouvant avoir un comportement hystérétique ou non. Mais il demeure une description phénoménologique ne contenant pas les mécanismes physiques responsables

des non-linéarités. Cette description du comportement macroscopique d'un milieu a été vérifiée avec succès pour décrire le comportement statique ou dynamique de milieux non linéaires [32] (forte non-linéarité, hystérésis, effets mémoires).

Cette description des non-linéarités susceptibles d'apparaître dans les milieux granulaires a permis d'identifier la richesse des mécanismes pouvant intervenir dans la réponse non linéaire du milieu sous une perturbation acoustique. Une compréhension complète des mécanismes responsables de la forte non-linéarité de ces milieux reste à résoudre. Un objectif encore à réaliser est l'obtention d'une relation contrainte/déformation générale comprenant l'ensemble des phénomènes physiques présents dans ces milieux

$$\sigma = f(\varepsilon_0, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \Psi(\nu), \nu, F(\varepsilon, \text{sign}(\varepsilon), \varepsilon_a), \dots). \quad (1.24)$$

#### 1.4.6 Problèmes actuels

Devant la grande variété de phénomènes ayant lieu au sein d'un empilement granulaire, pourquoi utiliser des méthodes acoustiques, et non linéaires? Une importante communauté de physiciens ont apporté leur contribution à l'étude de ces milieux par des méthodes différentes. Des méthodes capacitatives ont été employées pour la détermination de la compacité d'un empilement de grains [66] ou la distribution d'avalanches se produisant lorsque la surface libre du milieu granulaire dépasse l'angle de repos [38]. L'utilisation de la photoélasticimétrie a permis l'observation du réseau de chaînes de force [86] et de mieux appréhender la distribution de contraintes dans des empilement granulaires précontraints [52]. Des méthodes optiques par caméra rapide permettent le suivi d'écoulements de grains sur un plan incliné [76]. Pour sonder le milieu et mesurer la distribution de forces entre contacts, les premières méthodes utilisées furent le papier carbone [63, 54] puis la caractérisation d'un empilement granulaire par rayonnement gammamétrique [73, 78] a permis d'étendre l'investigation de l'assemblage géométrique de l'empilement au cœur de celui-ci.

Cependant, ces méthodes ne permettent pas d'accéder directement aux caractéristiques élastiques du milieu. Les mesures optiques, capacitatives ou gammamétriques ont en effet pour avantage de décrire géométriquement l'assemblage granulaire, par des mesures de la compacité ou du nombre de coordination par exemple. Les ondes élastiques sont alors une opportunité supplémentaire de sonder le milieu autrement que sur son désordre géométrique. A travers la propagation d'ondes dans le milieu granulaire, les propriétés mécaniques du milieu sont accessibles. Avec des méthodes d'acoustique linéaire, c'est-à-dire à faible amplitude acoustique, la caractérisation du milieu est non invasive. Ces méthodes très employées dans les milieux granulaires sous forte précontrainte [40] permettent d'identifier les modes de propagation des ondes élastiques et le module d'élasticité du milieu. Lorsque la longueur d'onde acoustique est de l'ordre du diamètre des grains, les ondes élastiques sont sensibles au désordre configurationnel du milieu [53]. La présence d'une distribution statistique de déformations entre contacts rend la description de la propagation acoustique dans ces milieux encore incomplète. Par exemple, la propagation d'ondes préférentiellement le long du réseau de chaînes de force est encore à vérifier. Une modélisation effectuée au chapitre 4 nous permettra de décrire l'influence du réseau de chaînes de force sur la propagation acoustique. Les méthodes d'acoustique non linéaire,

sensibles à la présence de faibles contacts, peuvent alors apporter des informations supplémentaires sur les propriétés physiques du milieu. Les phénomènes comme le clappement peuvent mettre en évidence la distribution de déformation de contacts pour des plus faibles déformations [85] que les méthodes optiques ou capacitives. Le comportement hystérétique du matériau granulaire peut aussi être révélé [32] et permettre la compréhension des mécanismes physiques ayant lieu au niveau des contacts. Nous verrons alors, dans le chapitre 4, comment les méthodes d'acoustique non linéaire peuvent nous renseigner sur la physique des contacts et leur évolution au cours du processus de compaction granulaire présentée dans le chapitre 2.

## 1.5 Conclusion

De la description microscopique à travers l'étude des contacts jusqu'au comportement macroscopique d'un empilement, un milieu granulaire présente des manifestations particulières. Ces milieux exhibent un désordre géométrique, dû à l'arrangement aléatoire des grains, ainsi qu'un désordre des forces de contacts inter-grains représenté par une distribution statistique des déformations statiques entre contacts.

La propagation acoustique au sein de ces milieux, introduite par une chaîne de billes unidimensionnelle, doit prendre en compte une large gamme de phénomènes : dispersion, diffusion, non-linéarité, .... L'influence du désordre des forces de contacts sur la propagation acoustique a été examinée à travers la prise en compte d'inclusions molles dans un modèle unidimensionnel simple. La sensibilité des méthodes d'acoustique non linéaire relativement aux méthodes linéaires provient de la présence de ces inclusions, représentant les contacts faibles.

Un phénomène particulier des milieux granulaires est la compaction d'un empilement. La compaction est un gain de volume du milieu réalisé grâce à une sollicitation mécanique extérieure. Pour suivre l'évolution du milieu au cours de ce processus, l'investigation de la compaction granulaire par des méthodes d'acoustique linéaire et non linéaire est réalisée.

Dans le chapitre 2, après un état de l'art sur la compaction granulaire, la compaction d'un empilement de billes de verre est examinée ainsi que l'évolution des fonctions de réponse en fréquence du milieu.

Dans le chapitre 3, les méthodes d'acoustique non linéaire sont utilisées pour caractériser le milieu, et leur sensibilité par rapport aux méthodes linéaires est mise en avant.

Dans le chapitre 4, l'influence des chaînes de force sur la propagation acoustique est étudiée pour un arrangement granulaire périodique.





## Chapitre 2

# Compaction des milieux granulaires

Ce chapitre traite spécifiquement de la compaction d'un empilement granulaire tridimensionnel non consolidé. La compaction d'un empilement granulaire consiste à diminuer le volume du milieu, en réarrangeant l'ensemble des grains sous l'action d'une sollicitation mécanique extérieure. La nécessité, dans l'industrie, de compacter un matériau granulaire provient de la volonté d'obtenir des matériaux denses, stables et de rigidité mécanique maximale. Il est connu qu'un empilement granulaire soumis uniquement à la gravité (milieu granulaire non consolidé) est au repos en l'absence de sollicitation. Mais une infime perturbation imposée au milieu peut être à l'origine de changements structuraux [27], les réarrangements des grains tendant à diminuer dans certaines conditions l'espace des pores du milieu. Au niveau industriel, la volonté d'obtenir un empilement compact relève d'un gain de volume (stockage des matériaux agroalimentaires) et d'une amélioration des propriétés (résistance mécanique) du matériau sous des sollicitations extérieures, dont les applications sont nombreuses avec l'essor de l'utilisation des poudres et granulats dans l'industrie du béton (obtention d'une compacité maximale), mais aussi dans le génie civil (stabilisation des sols avant construction, ballasts des voies de chemins de fer). Les procédés couramment utilisés pour compacter un milieu granulaire sont la compression uniaxiale de l'empilement et la vibration du milieu, généralement dans la direction verticale. Sous l'application d'une forte contrainte uniaxiale (rouleau compresseur ou lâcher de poids pour les sols), les grains proches de la surface comprimée atteignent des déformations plastiques importantes pouvant amener à la fracture des grains. Cette compaction hautement irréversible est utilisée par exemple dans l'industrie pharmaceutique pour transformer les poudres en comprimés. Elle n'est cependant utilisable que pour des matières premières à faible valeur ajoutée. Lorsque l'intégrité des grains doit être préservée, comme le stockage des matières agroalimentaires, des vibrations successives sont employées. Cette méthode de compaction est appelée "compaction douce".

Dans un premier temps, quelques rappels sur les expériences pionnières de compaction (menées par le groupe de Chicago dans le James Franck Institut, dans les années 1990 [39]), et celles plus récente (2000) du Groupe Matière Condensée et Matériaux à Rennes [79, 71]), sont exposés. Dans un second temps, notre dispositif expérimental de compaction et la caractérisation de l'empilement granulaire par des ondes élastiques sont présentés.

## 2.1 Etat de l'art sur la compaction

La compaction douce par vibrations d'un empilement granulaire crée des réarrangements successifs de grains qui tendent à minimiser l'espace des pores, d'où une augmentation de la compacité du milieu. Nous avons décrit dans le chapitre précédent la compacité d'un milieu granulaire comme étant le rapport entre volume occupé par les grains et le volume total de l'empilement. Ce paramètre, grandeur complémentaire de la porosité du milieu, est une caractéristique géométrique de l'empilement accessible de manière macroscopique. Pour cette raison, la compacité est un paramètre parmi les plus étudiés pour décrire la manière dont un système granulaire désordonné passe d'une configuration initiale à un état d'équilibre. La manière dont un empilement se réarrange sous les vibrations dépend d'un nombre important de paramètres physiques du milieu, comme la distribution de tailles et de forme des grains, les frottements entre grains (friction) et les frottements entre les grains et les parois latérales du récipient. L'objectif des travaux des deux dernières décennies sur la compaction d'empilement granulaire est la compréhension des réarrangements structuraux entre grains et de la distribution statistique de force entre grains soumis à des vibrations. La majorité de ces travaux porte sur des milieux granulaires modèles pour simplifier le problème de la compaction. Les systèmes granulaires ainsi considérés sont constitués de billes sphériques monodisperses (de même taille). La littérature la plus prolifique sur l'étude de la configuration d'un ensemble de particules uniformes provient sans aucun doute de la modélisation de l'arrangement d'atomes ou de molécules dans les liquides, les verres et les matériaux amorphes [25, 9], puis aux ensembles granulaires composés de sphères uniformes [80]. Les arrangements ordonnés les plus compacts sont l'arrangement cubique faces centrées et l'arrangement hexagonal compact, de compacité  $\Phi = 0.74$ . En introduisant une certaine quantité de désordre (dislocations, défauts cristallins), il est possible d'atteindre des compacités comprises entre 0.74 et 0.64. Mais pour un empilement désordonné, la compacité est comprise entre deux valeurs limites nommées "random loose packing" pour l'empilement aléatoire stable le moins compact avec une compacité de  $\Phi = 0.56$  et la compacité maximale  $\Phi = 0.64$  du système désordonné "random close packing". Ces deux valeurs limites de compacité d'un empilement désordonné sont empiriques et sans fondements mathématiques jusqu'ici. La manière la plus simple d'obtenir un empilement granulaire aléatoire est de verser dans un récipient les grains, les compacités obtenues variant de 0.58 à 0.61 pour des empilements instables sous vibrations. En réduisant les effets de la gravité, il est possible d'atteindre des compacités inférieures  $0.56 \leq \Phi \leq 0.58$ , en injectant un gaz sous pression par dessous l'empilement par exemple. Pour atteindre le "random loose packing", il faut donc s'affranchir des effets de la gravité  $g \rightarrow 0$ , la structure atteint un seuil de percolation où l'effet de dilatance (expansion du milieu granulaire sous contrainte de cisaillement) du milieu granulaire disparaît [68]. Des compacités plus élevées peuvent être atteintes, dans la gamme 0.61 à 0.64. Pour cela, il est nécessaire de vibrer l'empilement sur des temps suffisamment longs. Si la compacité d'un empilement monodisperse dépasse la valeur  $\Phi = 0.64$ , alors l'empilement cristallise partiellement. La limite de la structure aléatoire la plus compacte est difficile à établir [80, 9]. Elle représente un empilement aléatoire (donc sans ordre à courte échelle) assez dense tel qu'aucune augmentation de densité ne peut être atteinte sans apparition d'ordre à courte échelle.

Pour des empilements de sphères de tailles variées, plus proches des milieux naturels, les compacités maximales obtenues sont bien supérieures au 'random close packing' de l'empilement monodisperse. Des mélanges binaires et ternaires de tailles de billes [58, 6] ont été étudiés car ils présentent un état intermédiaire de complexité entre la structure idéale monodisperse et une large distribution de grains. Une dépendance entre le rapport des billes du mélange binaire et la compacité maximale atteignable est établie, correspondant intuitivement au nombre maximum de petites sphères disponibles entre les pores des sphères de diamètre supérieur. Une distribution de taille plus large permet aussi par un choix judicieux de diamètres d'atteindre des compacités proches de l'unité [67]. Ces expériences sur le mélange de grains polydisperses rejoignent les études mathématiques de pavage du plan par des cercles de taille variée initiées par Apollonius de Perga (200 avant J. C.) [57]. Cependant l'étude théorique et expérimentale de la compaction d'empilements polydisperses est grandement compliquée par le phénomène de ségrégation (séparation des grains en fonction de leur taille) au cours des vibrations.

La vibration d'empilements granulaires permet alors de parcourir une large gamme de compacité et d'explorer les différentes configurations de la structure du milieu. Nous présentons ici des résultats issus de travaux d'une équipe pionnière sur le processus de compaction [46, 39] réalisées à Chicago dans les années 1990, puis des expériences plus récentes d'une équipe française (Rennes) spécialisée dans la caractérisation de la compaction d'empilements granulaires notamment par des méthodes de rayonnement gammamétrique [73, 79]. La présentation de ces expériences est une introduction à la compaction douce d'empilements granulaires, ainsi qu'à l'ensemble des phénomènes particuliers propres aux milieux granulaires non consolidés vibrés : convection, états métastables, ...

### 2.1.1 Expériences de Chicago

Le dispositif expérimental utilisé pour les expériences de Chicago est présenté sur la figure 2.1. Il est constitué d'un cylindre en pyrex de diamètre  $D = 18.8 \text{ mm}$  rempli de billes de verre monodisperses de diamètre  $2 \text{ mm}$ . Par conséquent le rapport d'aspect de l'empilement (rapport entre le diamètre du récipient et le diamètre des grains) vaut  $d_h = D/d \sim 10$ . L'empilement est ainsi fortement contraint et les effets de bord (parois) sont non négligeables puisqu'un matériau granulaire est perturbé par la présence d'une paroi sur une distance d'au moins quatre diamètres de grains [7]. Il est généralement considéré que l'influence des effets de bord est négligeable sur une distance d'au moins 10 à 20 diamètres de grain [6]. L'ensemble est secoué à la base par un pot vibrant délivrant des sollicitations discrètes espacées d'une seconde pour permettre une relaxation complète du système (même si celle-ci est quasi-instantanée). Chaque secousse est un signal sinusoïdal à la fréquence 30 Hz pris sur une période. Le choix d'une basse fréquence pour l'excitation est nécessaire pour que l'empilement se restructure entre deux secousses. En effet, le temps de chute libre d'un grain de diamètre  $d$  sur une distance équivalente à son diamètre vaut  $t_d = \sqrt{2d/g}$ , ce qui correspond à des fréquences de quelques dizaines de hertz pour des grains millimétriques. Un accéléromètre placé à la base de l'empilement permet de quantifier l'amplitude de la secousse par son accélération à la base. Un paramètre normalisé  $\Gamma$  est défini comme le rapport de l'accélération mesurée à la base sur l'accélération de la pesanteur. Pour une vibration d'amplitude de déplacement  $A$  et de pulsation  $\omega$ , l'amplitude normalisée vaut donc  $\Gamma = A\omega^2/g$ .

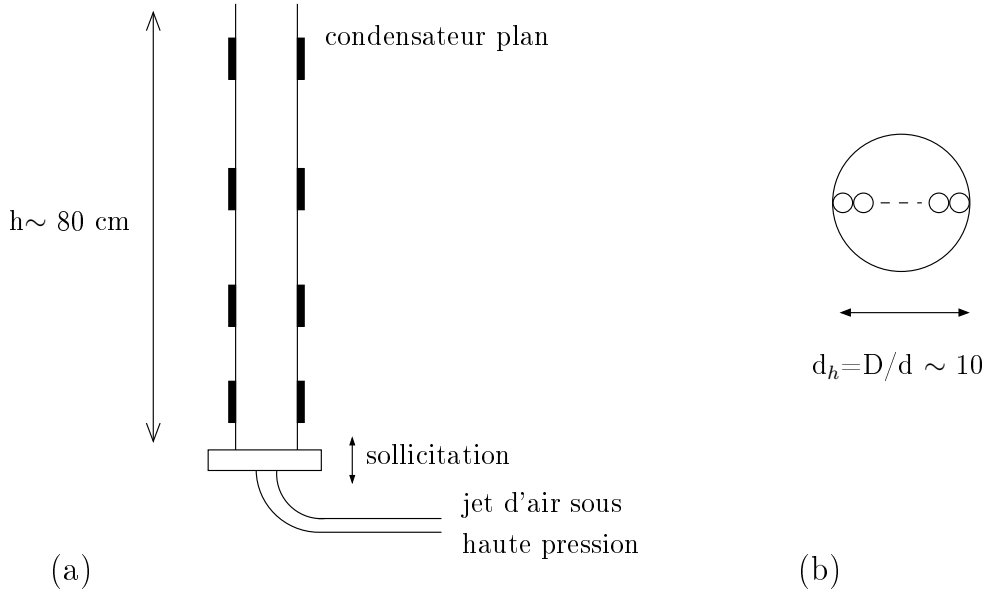


FIG. 2.1 – (a) Schéma simplifié du dispositif expérimental de compaction de l'équipe de Chicago. (b) le rapport d'aspect (diamètre du récipient sur diamètre des grains) utilisé lors de l'expérience.

### *Choix de la sollicitation*

L'intérêt de ce type de sollicitation comparée à une vibration continue repose sur plusieurs aspects. Une sollicitation discrète permet une mesure propre des paramètres du milieu (le mouvement des grains n'est pas dû à la sollicitation précédente) tout en évitant les ondes de surface et le phénomène de doublement de période apparaissant dans le cas d'une vibration continue. Ce phénomène provient directement de la corrélation existante entre l'accélération imposée à la base de l'empilement et le temps de vol des grains qui dépend de leur vitesse et phase lors de l'éjection (voir figure 2.2). Lorsque l'amplitude  $\Gamma$  de la sollicitation continue est faible, le temps de vol  $\tau$  est inférieur à la période  $T$  de la vibration imposée. Les grains sont éjectés de la base lorsque leur accélération est supérieure à celle de la gravité et retombent sur la base pour un temps  $T - \tau$  sur un cycle de vibrations.

Pour une amplitude limite  $\Gamma_{lim}$ , les billes retombent sur la base exactement lorsque l'accélération vaut celle de la gravité et redécollent aussitôt, par conséquent  $\tau = T$ . Le phénomène de doublement de période se produit lorsque l'amplitude de la sollicitation dépasse  $\Gamma_{lim}$ . Après un premier vol long ( $\tau > T$ ), à la retombée des grains, l'accélération imposée est supérieure à  $g$  et il y a à nouveau décollage mais avec une vitesse plus petite pour un vol court. Le temps de vol est un mouvement de période  $2T$ , d'où le doublement de période, et il y a bifurcation du temps de vol lorsqu'il atteint la période  $T$  du mouvement de la base. Ce phénomène est à l'origine de l'apparition de sous-harmoniques de la fréquence de vibrations dans la mesure des spectres du bruit de réarrangement des grains par un pendule en torsion [17].

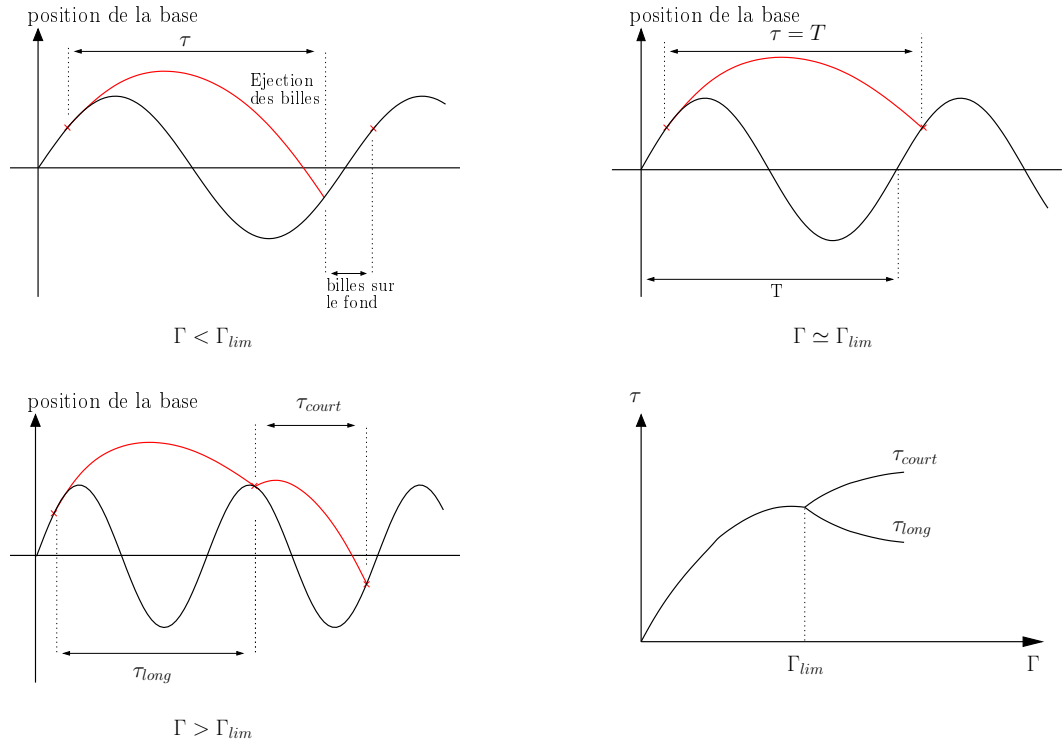


FIG. 2.2 – Apparition du phénomène de doublement de période avec l'augmentation de l'amplitude  $\Gamma$  des vibrations continues.

### *Préparation de l'empilement et mesure de compacité*

Pour obtenir un empilement très peu dense, un jet d'azote gazeux à haute pression est envoyé sous la colonne granulaire, ce qui permet d'atteindre une compacité reproductible proche de 0.57. Les charges électrostatiques entre billes sont évitées par lavage des billes, et l'interaction des billes avec les parois minimisée par traitement des surfaces du récipient. Les mesures de compacité sont réalisées par méthodes capacitatives. Pour cela, quatre condensateurs plans sont situés à différentes hauteurs le long de la colonne granulaire. La fraction volumique de l'empilement, qui varie linéairement avec la variation de permittivité du milieu, est déduite de la variation de capacité des condensateurs. En parallèle, un dispositif optique évalue la hauteur de la colonne granulaire pour valider les mesures capacitatives.

### *Courbes de compaction*

Les courbes d'évolution de la fraction volumique de l'empilement avec le nombre de secousses (ou "taps") pour différentes amplitudes de secousses  $\Gamma$  sont présentées sur la figure 2.3. Le processus de compaction avec le nombre de taps est très lent. Cela se traduit par des expériences nécessitant jusqu'à  $10^4$  secousses pour atteindre un état d'équilibre. Pour ces raisons, l'échelle logarithmique est employée pour représenter l'évolution de la compacité. L'amplitude  $\Gamma$  des secousses joue particulièrement sur la

dynamique de densification. A faible amplitude de secousse  $\Gamma \leq 3$ , le milieu atteint des états d'équilibre inférieurs à la structure dense du "random close packing". Ces états d'équilibre sont appelés états métastables. Les états finaux atteints sont de compacité croissante avec l'amplitude des sollicitations  $\Gamma$ . Pour des sollicitations plus importantes  $3 \leq \Gamma \leq 6$ , l'état final atteint est proche de  $\Phi_{rcp} = 0.64$  et le comportement des courbes de compacité est analogue pour différentes amplitudes  $\Gamma$ . Une amplitude caractéristique  $\Gamma_c$  semble correspondre à la transition entre les états métastables et l'état final  $\Phi_{rcp}$ . Au dessus de cette valeur critique  $\Gamma_c$  proche de 2, le taux d'accroissement de la compacité devient nul après une séquence de  $10^4$  taps. Cette amplitude limite dépend principalement des conditions de frottements entre billes et des billes avec les parois [46]. Un autre résultat important est le caractère homogène de la compaction de l'empilement sur la hauteur de la colonne au vue des mesures des différents condensateurs. Seule la partie haute de l'empilement (située à 80 cm) diffère en compacité du reste de l'empilement, avec une densification sans limite finale atteinte au cours de l'expérience.

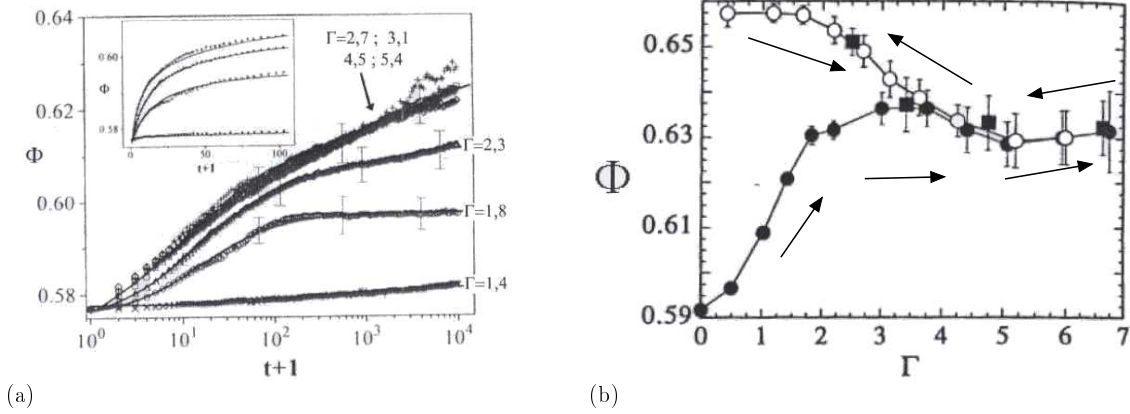


FIG. 2.3 – (a) : Compacité mesurée à la base de l'empilement en fonction du nombre de secousses pour des amplitudes de sollicitations croissantes. (b) : Influence de l'histoire du système par mesure de la compacité après  $10^5$  taps avec augmentation (cercles noirs), diminution (cercles blancs) et à nouveau augmentation (carrés noirs) de l'amplitude  $\Gamma$  des secousses.

#### *Loi d'ajustement du processus de compaction*

Une loi empirique, inversement proportionnel au logarithme du nombre de secousses, a été proposée [46] pour caractériser la dynamique de compaction :

$$\Phi(t) = \Phi_{\infty} - \frac{\Delta\Phi_{\infty}}{1 + B \ln(1 + \frac{t}{\tau})}. \quad (2.1)$$

Cette loi fait intervenir quatre paramètres. La valeur finale de compacité  $\Phi_{\infty}$  et l'accroissement total de compacité  $\Delta\Phi_{\infty}$  sont accessibles expérimentalement. De l'ajustement sont extraits un temps caractéristique  $\tau$  de dynamique compaction, qui décroît avec l'amplitude de secousses, et un paramètre

$B$  sans interprétation physique. Cette équation diffère notablement par son aspect empirique des lois d'ajustement proposées jusqu'alors. Un modèle de double exponentielle [3] a été utilisé pour décrire deux types de mouvements pour les grains, des mouvements individuels ou collectifs. Les mouvements individuels de grains sont caractérisés par un temps de relaxation  $\tau_{ind}$  et les mouvements collectifs de grains, amenant à une modification d'ensemble de la structure de l'empilement, par un temps caractéristique  $\tau_{col}$ . Une loi de relaxation exponentielle est alors associée à chaque mouvement de grains

$$\Phi(t) = \Phi_{\infty} - \Delta\Phi_{ind}e^{-t/\tau_{ind}} - \Delta\Phi_{col}e^{-t/\tau_{col}}. \quad (2.2)$$

Enfin, une loi issue de la physique des verres est couramment utilisée pour décrire les systèmes thermiques hors équilibre. La loi de Kohlrausch-Williams-Watts ou fonction KWW, caractéristique du comportement des verres fragiles proches de la température de transition vitreuse [19], est une exponentielle étendue caractérisant l'hétérogénéité spatiale de relaxation dans les verres

$$\Phi(t) = \Phi_{\infty} - \Delta\Phi_{\infty}e^{-(\frac{t}{\tau})^{\beta}}, \quad (2.3)$$

avec  $\tau$  un temps caractéristique de relaxation du système hors équilibre, et  $\beta$  un paramètre ajustable.

#### *Influence de l'histoire du système*

La variation de l'amplitude des sollicitations fournies à l'empilement sur la dynamique de compaction peut mettre en évidence l'effet mémoire du milieu. En effet, l'état du milieu granulaire à un instant  $t$  dépend des configurations précédentes du système. Une expérience employée [44] pour caractériser cet effet mémoire est la vibration d'empilements par des sollicitations d'amplitude différente jusqu'à l'obtention d'une même compacité. Les empilements obtenus, de même compacité, sont ensuite soumis à des sollicitations de même amplitude. Il en résulte une dynamique d'évolution différente des empilements suivant les sollicitations antérieures. En passant d'une amplitude de sollicitation  $\Gamma_1$  faible à une amplitude plus forte  $\Gamma_2 > \Gamma_1$ , le milieu se dilate [44, 66] avant de retrouver une évolution classique de densification. La caractérisation de l'état asymptotique de compacité du milieu en fonction de l'amplitude des secousses  $\Gamma$  permet de retrouver cette influence de l'histoire du système. Pour cela, un empilement granulaire est vibré sur une séquence de  $10^5$  taps pour différentes amplitudes de sollicitations et la compacité finale est mesurée (voir la figure 2.3). Dans une première phase, en incrémentant progressivement l'amplitude de la secousse  $\Gamma$  de  $\Gamma = 0.5$  à  $\Gamma = 7$ , des compacités finales croissantes sont obtenues jusqu'à un seuil critique  $\Gamma_{cr}$  au dessus duquel la compacité diminue. La deuxième phase consiste à diminuer progressivement l'amplitude  $\Gamma$ . La courbe obtenue pour les amplitudes croissantes est à nouveau décrite jusqu'au seuil critique  $\Gamma_{cr}$  puis diverge vers de plus hautes compacités pour de faibles sollicitations. Une branche particulière de compacité est ainsi décrite plusieurs fois, appelée branche "réversible". Pour de fortes amplitudes de sollicitations, le milieu granulaire atteint un véritable état stationnaire reproductible. Au contraire, pour de plus faibles sollicitations, une branche irréversible existe selon le sens de variation de l'amplitude des secousses. L'échantillon granulaire est piégé dans un état métastable non reproductible.

Ces résultats présentent une forte analogie avec les systèmes vitreux, à l'origine de l'utilisation de la loi KWW (2.3). Au vu des résultats précédents, pour compacter rapidement un milieu granulaire, une technique consiste à compacter le système au-dessus de l'amplitude critique  $\Gamma_{cr}$ , puis à diminuer progressivement l'amplitude  $\Gamma$  en parcourant la branche irréversible. Cette technique est analogue à la trempe dans les systèmes vitreux, où le taux de refroidissement  $|\frac{dT}{dt}|$  doit être le plus faible possible pour annuler les défauts du milieu, afin que les temps de réarrangements structuraux coïncident avec le temps de refroidissement du système. Par analogie, en remplaçant la température  $T$  pour les verres par l'amplitude des secousses  $\Gamma$ , une démarche efficace consiste à utiliser initialement une amplitude de sollicitation importante puis compacter avec un taux de compaction  $|\frac{d\Gamma}{dt}|$  faible.

### 2.1.2 Expériences de Rennes

Après la présentation des travaux de Chicago, des résultats récents sur la physique de la compaction sont exposés à travers les études de l'équipe de Rennes. Les moyens usuels de mesure de la compacité consistent en une mesure optique de la hauteur de l'empilement ou des mesures capacitives, ou résistives, de la transmission à travers le milieu étudié. Dans ces résultats, un dispositif gammamétrique de mesure de l'absorption du rayonnement du milieu granulaire et la possibilité de visualiser le mouvement des grains jusqu'à 4 cm à l'intérieur du récipient sont mis en place. Cette méthode a pour avantage d'éclaircir le rôle du phénomène de convection dans la dynamique de compaction de l'empilement granulaire.

#### *Dispositif expérimental*

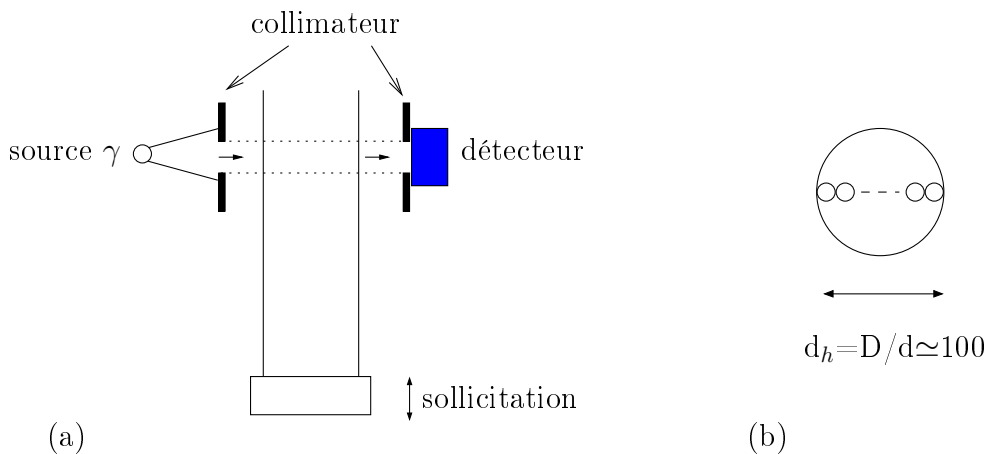


FIG. 2.4 – (a) Schéma simplifié du dispositif expérimental de compaction de l'équipe de Rennes. (b) Rapport d'aspect (diamètre du récipient sur diamètre des grains) utilisé lors de l'expérience.

Le dispositif expérimental utilisé dans les expériences de Rennes est présenté sur la figure 2.4. Il consiste en une cuve cylindrique en verre de diamètre  $D = 95 \text{ mm}$  remplie de billes de verre de diamètre



variant entre 0.5 et 10 *mm* pour obtenir des rapport d'aspect s'échelonnant de 200 à 10. L'effet des parois et la mise en ordre à court terme sont ainsi évités, étant donné l'écartement latéral choisi. L'empilement lâche de départ est obtenu par versement à débit rapide des billes sur un tamis disposé au fond du récipient, celui-ci étant retiré à vitesse régulière pour aérer l'empilement et obtenir des compacités initiales proche de 0.58. Le principe de mesure est ici brièvement rappelé. Une source de césium émet un faisceau de photons qui est focalisé après passage dans un collimateur ; après passage dans l'empilement, le faisceau est à nouveau collimaté avant de rencontrer un détecteur transformant la quantité de photons incidents en un signal électrique proportionnel à l'énergie reçue. La mesure du signal électrique reçu quantifie l'absorption du signal par le milieu, qui est proportionnelle à la compacité locale de l'empilement sondé par le faisceau. Ce dispositif permet d'obtenir une mesure de compacité locale avec une précision de 0.3%. Le récipient est placé sur un excitateur électromagnétique générant des impulsions basses fréquences et l'ensemble est installé sur un banc piloté permettant une rotation autour de l'axe vertical et des translations selon les trois axes de l'espace pour sonder l'ensemble de l'empilement.

### *Courbes de compaction*

Les caractéristiques des courbes de compaction obtenues lors de ces expériences sont les suivantes :

- la compacité finale  $\Phi_\infty$  atteinte à l'état stationnaire est d'autant plus faible que l'amplitude des sollicitations est forte,
- plus l'amplitude des secousses  $\Gamma$  est forte, plus la dynamique de compaction est rapide (l'état stationnaire est atteint plus rapidement),
- l'étude des profils de compacité sur la hauteur de l'empilement montre que la compaction est un phénomène local avec une densification homogène de l'empilement.

Les évolutions observées expérimentalement sont bien modélisées par la loi KWW ( 2.3) en exponentielle étendue avec un comportement d'Arrhenius pour la loi cinétique de compaction :  $\ln(\tau) \sim \Gamma^{-1}$ . Enfin, la dynamique de compaction est plus rapide que dans les expériences de Chicago. En effet, l'état final est atteint au bout de  $10^2$  taps contre  $10^4$  secousses pour les expériences de Chicago. Cette dynamique rapide est l'effet du comportement convectif observé dans l'ensemble de l'empilement.

### *Influence de la convection*

La convection dans un empilement granulaire sous sollicitations correspond aux déplacements collectifs de grains sur la hauteur de l'empilement. Cet effet est nettement sensible aux conditions aux parois. Le frottement des grains aux parois diminue le déplacement des billes relativement à celles à l'intérieur du récipient (loin des bords). Ce phénomène crée un déséquilibre dans le mouvement des grains créant des rouleaux de convection entre les grains à la périphérie du récipient (dans un mouvement descendant) et ceux au centre de l'empilement (mouvement ascendant). Cet effet est à l'origine de la formation d'une surface libre non plane de la colonne granulaire. Une étude de la convection par l'équipe de Chicago a montré, à l'aide du mouvement de traceurs dans l'empilement,

que la convection respecte la symétrie cylindrique du récipient [45]. L'utilisation d'un récipient plus large par l'équipe de Rennes permet d'étudier une large gamme de rapport d'aspect et d'observer une brisure de la symétrie cylindrique par la visualisation des vitesses et déplacements de grains à la paroi. La mise en tas de l'empilement est observée, montrant l'existence d'une amplitude de sollicitation seuil  $\Gamma_{tas}$  pour laquelle l'empilement forme à sa surface un tas incliné suivant deux plans dont l'un est plus grand que l'autre (voir figure 2.5). Au dessus de  $\Gamma_{tas}$ , le tas est de forme conique à symétrie cylindrique. Enfin pour de faibles sollicitations, la surface granulaire est un plan incliné sur toute la largeur du cylindre.

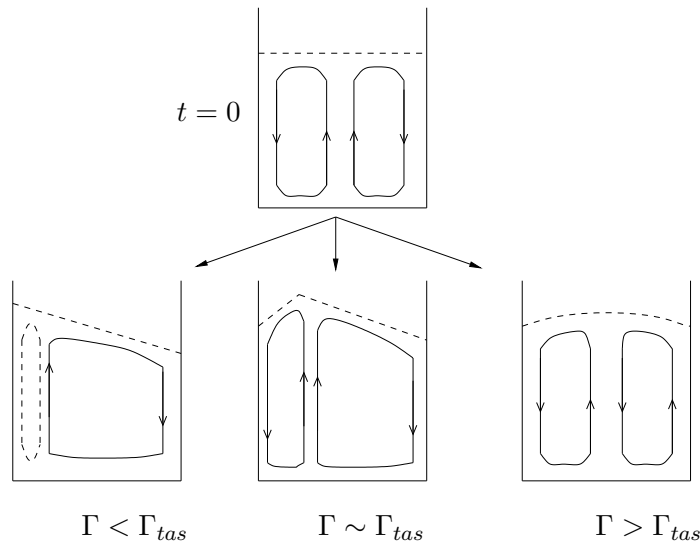


FIG. 2.5 – Effet de la convection au cours de la compaction sur la mise en tas en fonction de l'amplitude des secousses [78].

La convection qui a lieu dans un empilement granulaire sous sollicitations permet d'atteindre plus rapidement l'état stationnaire, des empilements de plus grande compacité, et est plus importante pour des assemblages de grains polydisperses que monodisperses [78].

### *Influence d'une charge sur l'empilement*

Pour notre dispositif expérimental de compaction, il s'avère nécessaire de comprendre l'effet d'une charge placée au sommet de l'empilement et son influence sur la compaction. Cette surcharge impose une contrainte verticale constante sur le milieu et interdit l'inclinaison de la surface de l'empilement. L'effet majeur de cet ajout de masse est le ralentissement de la dynamique de convection et de compaction de l'empilement. La compacité maximale atteinte est supérieure au cas sans charge pour des sollicitations de même amplitude [71].

### 2.1.3 Simulation numérique

Les expériences de compaction ont mis en évidence une phénoménologie riche : relaxation lente de l'empilement, effets mémoires, analogie avec les verres. Les simulations numériques ont alors pour intérêt de considérer l'influence d'un grand nombre de paramètres (coefficient de frottement, taille des billes, ...) sur le processus de compaction et d'éclairer les résultats expérimentaux. Différentes approches numériques ont été réalisées, ici reportées succinctement dans un exposé non exhaustif.

Les modèles phénoménologiques sont liés à la notion de volume libre et de contraintes géométriques entre grains. Les modèles de volume libre [10] considèrent une variation de compacité entre deux secousses proportionnelle à la probabilité qu'un nombre de grains suffisamment important se réarrangent. Une évolution de la compacité en inverse du logarithme du nombre de secousses est retrouvée, avec une limite asymptotique indépendante de l'amplitude de la sollicitation. Les branches réversibles et irréversibles sont obtenues, ainsi que l'effet mémoire de l'empilement. D'autres modèles associent l'ensemble de grains à des "clusters" [26], ou groupement de grains de tailles variées se réorganisant selon diverses lois dynamiques. Ce remplissage des vides de l'empilement est à l'origine de modèles plus abstraits, comme le modèle du Tétris [12] ou du Parking [83], pour lesquels la probabilité de déplacement de pièces anisotropes sont analysées en fonction du nombre de secousses et des vides laissés vacants dans le système granulaire. Etant éloignés de la réalité, ces modèles permettent d'obtenir la relaxation lente du système et les branches réversible-irréversible en fonction de l'amplitude des secousses.

Une modélisation plus réaliste de la compaction granulaire est un modèle de type Monte-Carlo [2, 3, 72]. L'empilement de départ est obtenu par déposition séquentielle des billes. Chaque secousse consiste en une dilatation du milieu suivie d'une phase de redéposition sous la gravité. L'empilement a ainsi la possibilité de se réarranger entre chaque secousse, et va progressivement se restructurer. L'intérêt de ces méthodes est la possibilité de simuler un grand nombre de secousses permettant la lente réorganisation structurale. Les premières études de type Monte-Carlo suggèrent une évolution temporelle de la compaction granulaire en double exponentielle [3], caractérisée par la loi de relaxation (2.2). Il est aussi possible d'étudier l'état structural de l'empilement. L'analyse du réseau de contacts montre qu'à fortes amplitudes de secousses, les effets individuels de déplacement de particule domine [3], et que la structure spatiale des chaînes de force est très sensible à l'amplitude des secousses. Le profil vertical de compacité peut aussi être analysé, montrant une compaction homogène sur la hauteur de l'empilement excepté sur une zone proche de la surface libre de l'empilement [4].

Les méthodes d'élément discret, comme la dynamique moléculaire, permettent d'intégrer aux simulations dynamiques le déplacement des billes et les chocs entre celles-ci selon des lois physiques [82]. Les grains sont alors considérés déformables. Les forces interagissant entre les grains sont calculées à partir des lois physiques considérées (loi de Hooke élastique, frottements entre grains), puis les équations du mouvement sont intégrées sur l'ensemble des grains. Ces simulations sont cependant très coûteuses en temps de calcul, et ne peuvent ainsi analyser l'empilement sur une longue séquence de compaction.

L'accent est alors particulièrement porté sur le phénomène de convection pouvant survenir rapidement au sein de l'empilement. Elles ont de plus l'inconvénient de considérer des billes "molles" déformables. Pour palier à ce défaut, la dynamique des contacts privilégie des billes indéformables ne pouvant pas s'interpénétrer. Ce modèle permet d'obtenir l'effet mémoire caractéristique des granulaires, tout en étant très proche de la physique du milieu.

Puisque les milieux granulaires sous compaction semblent présenter une analogie avec les verres, des approches thermodynamiques ont été réalisées [23, 22]. Les milieux granulaires sont athermiques, pour des grains suffisamment gros, et la thermodynamique classique ne peut s'appliquer. Une approche de physique statistique a été proposée [22] pour les poudres denses sous sollicitations modérées. En considérant le principe de conservation de volume, un équivalent de la température thermodynamique est proposé, la compacité. Une température effective du milieu granulaire, appelée température d'Edwards, est introduite et permet la description de la relaxation du système hors de son équilibre [55]. Il reste cependant à valider expérimentalement ce concept [56].

### *Bilan sur la compaction granulaire*

La compaction d'un empilement granulaire est un processus lent, logarithmique avec le nombre de secousses. Une caractéristique de l'évolution de ces milieux vers leur état d'équilibre est la dépendance de la compacité finale du milieu avec l'amplitude des sollicitations imposées. Ces différents états, différents du "random close packing"  $\Phi = 0.64$ , sont des états métastables. Un milieu granulaire conserve dans son état structural l'histoire du milieu, c'est-à-dire que son état de compacité à un instant donné dépend de l'amplitude des sollicitations précédents, et donc des configurations passées. L'effet des parois du récipient contenant le milieu granulaire est prépondérant sur une distance de l'ordre de dix à vingt diamètres de grains. Ceci explique l'importance du choix des dimensions du dispositif à concevoir pour compacter un empilement. Dans la section suivante, notre dispositif expérimental mis au point pour compacter un assemblage granulaire est présenté.

## 2.2 Dispositif expérimental

Nous avons procédé à des expériences de compaction sur un dispositif simple autorisant le suivi acoustique de l'empilement au cours du processus de densification. Dans cette partie sont présentés les moyens mis en oeuvre pour compacter le milieu granulaire non consolidé, la mesure de la compacité du milieu et les courbes de compaction associées à différentes amplitudes de sollicitation.

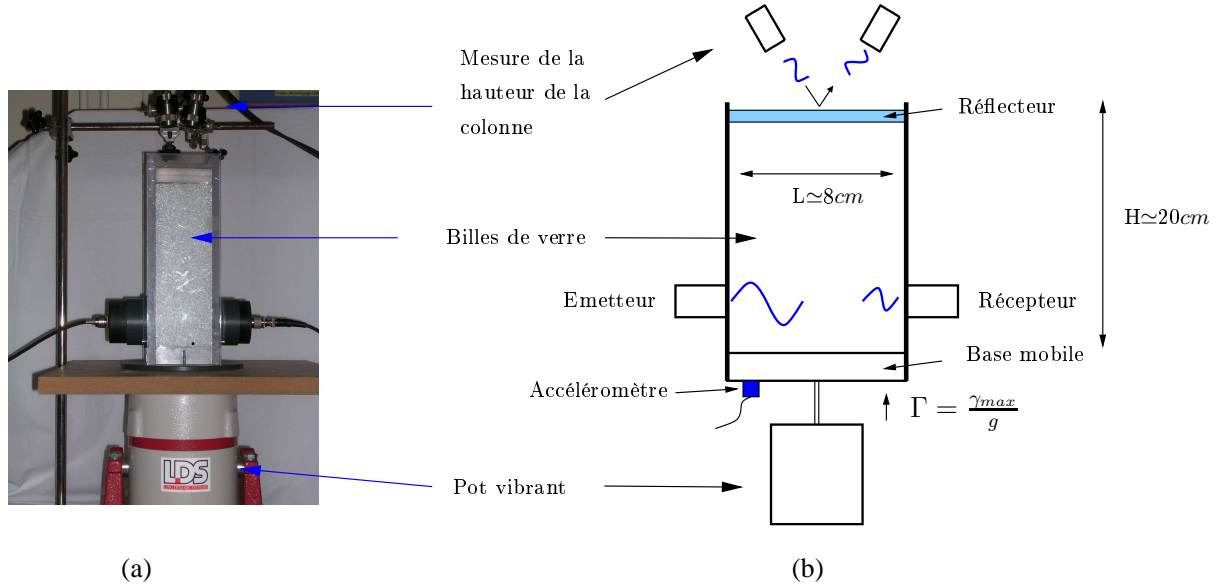


FIG. 2.6 – (a) Photographie du dispositif expérimental de compaction. (b) Schéma de principe du dispositif de mesure : excitation, mesure de la compacité, mesures acoustiques.

### 2.2.1 Dispositif de sollicitation

Le dispositif de compaction est représenté sur la figure 2.6. L'expérience consiste à faire vibrer par des sollicitations discrètes, ou taps, une cuve remplie de billes de verre monodisperses. Alors que la plupart des expériences de compaction reportées dans la littérature utilise des récipients cylindriques [46, 78], notre volonté de positionner des capteurs ultrasonores le long des parois de part et d'autre de l'empilement nous a contraint à utiliser une cuve rectangulaire. Par conséquent, les transducteurs s'ajustent parfaitement aux parois sans être intrusifs. Les dimensions de cette cuve sont  $8 \times 8\text{ cm}$  de côté pour une hauteur de  $25\text{ cm}$ . Le matériau utilisé pour le récipient est du Makrolon pour sa haute résistance (évite la fissuration du matériau lors de l'application des capteurs) et sa transparence optique (afin de suivre l'évolution du milieu). L'ensemble du dispositif est secoué à sa base mobile par un pot vibrant électromagnétique LDS V406 placé sous la cuve. Le signal de commande de ce pot vibrant est un signal sinusoïdal de fréquence  $60\text{ Hz}$ , pris sur une période, généré par un générateur de fonction AGILENT 33120A. Les sollicitations successives sont séparées par un délai de l'ordre de la seconde pour permettre au milieu de se relaxer et d'effectuer les mesures acoustiques sur un empilement

statique. Cette commande est envoyée par l'intermédiaire d'un amplificateur de puissance LDS PA100E à gain ajustable, permettant de faire varier l'amplitude du signal transmis. Un accéléromètre situé à la base de l'empilement vibré permet une mesure de l'amplitude de la sollicitation, dont un signal typique est présenté sur la figure 2.7. L'accélération mesurée présente un pic d'accélération négative d'amplitude  $-\gamma_{max}$ . L'accéléromètre, placé sous la base mobile, mesure une accélération négative dans la direction opposée à la force de pesanteur. L'amplitude de la sollicitation est obtenue en normalisant cette accélération par l'accélération de la pesanteur  $g$

$$\Gamma = \frac{\gamma_{max}}{g}. \quad (2.4)$$

Les amplitudes normalisées de sollicitations accessibles à l'expérience se situent entre  $\Gamma = 0.5$  et  $\Gamma = 5$ . Il a été vérifié expérimentalement que l'amplitude des sollicitations était identique au cours d'une expérience de compaction.

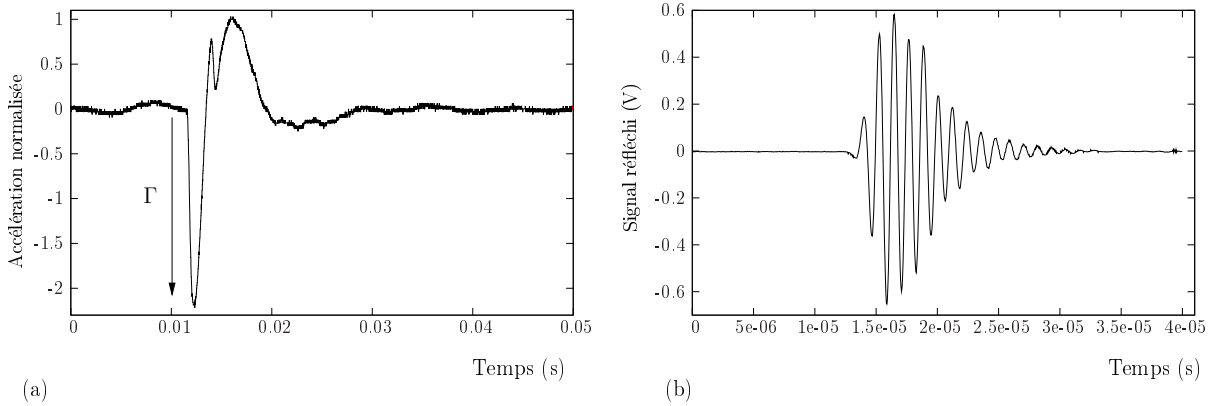


FIG. 2.7 – (a) Signal accélérométrique capté à la base de l'empilement lors d'une secousse. (b) Signal ultrasonore réfléchi par la plaque posée à la surface de l'empilement.

### 2.2.2 Matériau utilisé

La grande majorité des expériences de compaction a été réalisée avec des billes de verre de diamètre  $d = 2 \text{ mm}$  (CentraVer Composites<sup>1</sup>). La taille millimétrique choisie permet d'obtenir un ensemble de grains sphériques présentant une faible polydispersité (variation de rayon inférieure à 2%). La figure 2.8(a) présente une photographie obtenue au microscope et confirme en effet la taille annoncée par le constructeur, le caractère monodisperse ainsi que la sphéricité des billes.

Pour analyser l'effet du diamètre des billes sur le processus de compaction ainsi que sur la propagation acoustique, des billes de diamètre  $0.7 \text{ mm}$  (SiLiBeads<sup>2</sup>) ont aussi été utilisées. Ces billes présentent une plus grande distribution de tailles (voir la photographie de la figure 2.8(b)).

<sup>1</sup>CENTRAVER COMPOSITES & POLYMERS, 62, boulevard de Beaubourg, 77184 EMERAINVILLE

<sup>2</sup>voir le site [http://www.sigmund-lindner.com/glitter/web/SiLibeads-Glass\\_id\\_92\\_.htm](http://www.sigmund-lindner.com/glitter/web/SiLibeads-Glass_id_92_.htm)

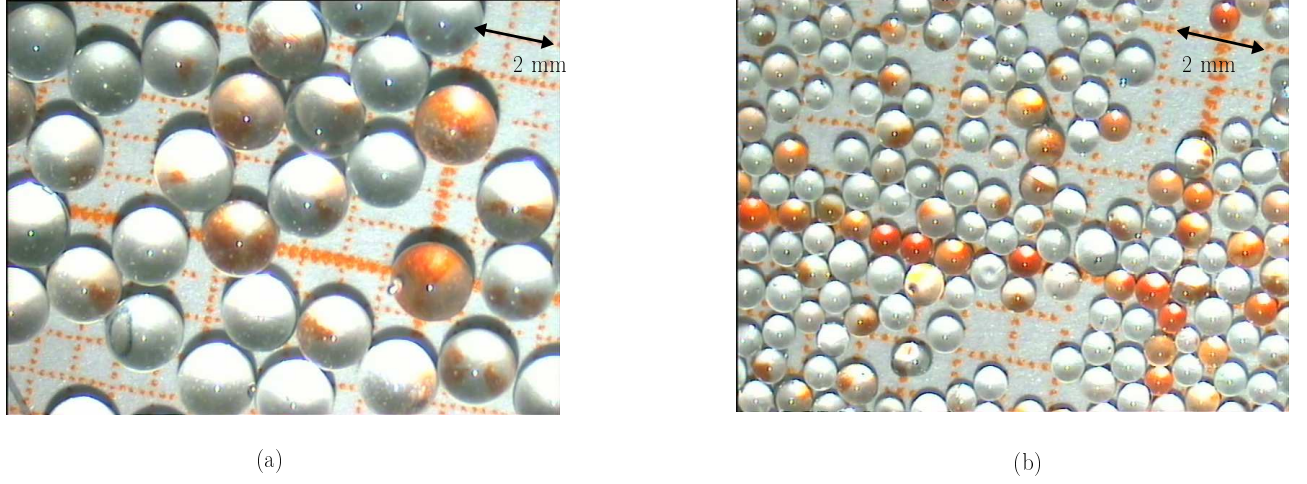


FIG. 2.8 – (a) Photographie des billes de verre de diamètre 2 mm. Les billes sont sphériques et assez monodisperses. (b) Photographie des billes de verre de diamètre 0.7 mm. La sphéricité des billes est conservée mais une nette polydispersité apparaît. (photos M. Fouqueray)

La masse volumique des billes de verre utilisées dans la suite du document est  $2500 \text{ kg/m}^3$  pour un module d'Young de 65 GPa. Au total une masse de 2 kg de billes est placée dans la cuve, ce qui correspond pour les billes de 2 mm à environ 200000 billes. L'empilement initial de faible compacité est obtenu en versant les billes avec un débit rapide dans la cuve, figeant la position des grains et empêchant celles-ci de se réarranger. L'accroissement de compacité du milieu est alors plus important pour un empilement initial de faible compacité et permet une analyse plus simple du comportement du milieu granulaire sous sollicitation verticale. En utilisant cette préparation, la hauteur initiale de l'empilement est reproductible et vaut  $h_o = 185 \pm 2 \text{ mm}$ . La compacité initiale de l'empilement est estimée par

$$c_o = \frac{V_{billes}}{V_{total}} = \frac{N_{billes} \frac{4}{3} \pi R^3}{D^2 h_o}, \quad (2.5)$$

avec  $R$  le rayon des billes,  $D$  la dimension latérale de la cuve et  $N_{billes}$  le nombre de billes versées obtenu par mesure de la masse du tas de billes. La compacité initiale obtenue est alors  $c_o = 0.585 \pm 0.005$ .

### 2.2.3 Mesure de la compacité

La variation de compacité de l'empilement granulaire est estimée à partir de la mesure de la variation de hauteur de la colonne granulaire par une méthode ultrasonore. Pour cela, une plaque réfléchissante de masse  $M = 60 \text{ g}$  est placée sur l'empilement une fois l'empilement initial créé. Deux transducteurs ultrasonores Panametrics V306 sont disposés en configuration transmission/réflexion au dessus de l'empilement (voir la figure 2.6). L'angle entre les transducteurs par rapport à la verticale est assez faible pour se placer dans l'hypothèse d'une réflexion normale de l'onde par rapport à la plaque. Les signaux émis sont des impulsions de fréquence centrale 2 MHz, générées par l'intermédiaire d'un

générateur d'impulsions SOFRANEL. Un exemple de signal reçu après réflexion est présenté sur la figure 2.7(b). Pour l'empilement initial de compacité  $c_o$ , une mesure en réflexion permet d'obtenir le temps de vol de l'onde après réflexion sur la plaque. Les transducteurs étant désolidarisés du dispositif de compaction, le décalage de ce temps de vol permet d'estimer la diminution de la hauteur de la colonne de grains et ainsi l'évolution relative de la compacité du milieu par rapport à la compacité initiale. Le signal reçu étant composé de plusieurs périodes hautes fréquences avec une amplitude modulée (l'enveloppe), le décalage du temps de vol est estimé soit par détection de son maximum, soit par corrélation avec le signal mesuré pour l'empilement initial. Le décalage du temps de vol obtenu par ces deux méthodes est identique et valide le traitement proposé.

Il est clair que le dispositif de mesure proposé est un dispositif simple ne permettant pas une mesure absolue de la compacité du milieu mais bien une mesure relative de la compacité par rapport à l'état initial. Les résultats obtenus sont cependant suffisants dans le but de décrire qualitativement l'évolution du milieu granulaire sous sollicitation, l'accent étant porté dans ces travaux sur la description des phénomènes acoustiques.

### 2.2.4 Courbes de compaction

La figure 2.9 présente l'évolution de la compacité du milieu constitué de billes de verre de diamètre  $2\text{ mm}$  pour différentes amplitudes de sollicitations  $\Gamma$ . L'évolution du milieu vers un état final est très lente, avec une dynamique logarithmique. L'utilisation d'une échelle logarithmique en abscisse (le nombre de taps) permet alors d'observer si l'état stationnaire est atteint au cours d'une expérience de compaction.

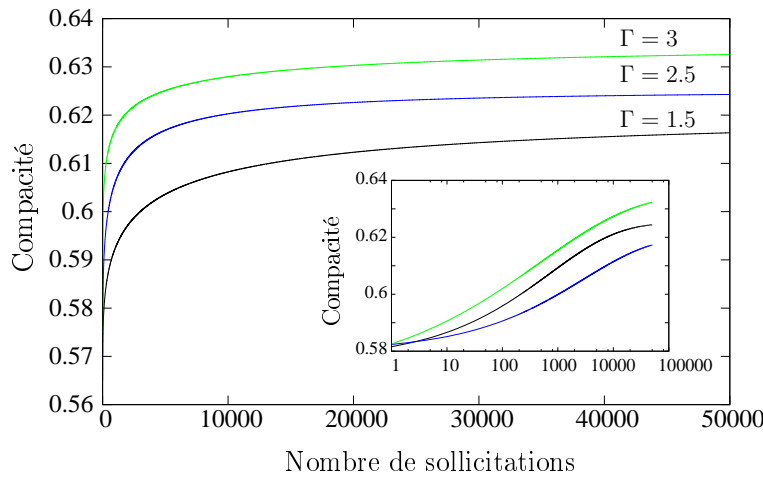


FIG. 2.9 – Courbes de compaction obtenues pour une séquence de  $n = 5.10^4$  taps avec différentes amplitudes de sollicitations. Les billes de  $2\text{ mm}$  de diamètre sont utilisées.

D'après l'insert de la figure 2.9, l'état final n'est pas stationnaire après une séquence de  $5.10^4$  taps, alors même qu'au bout de  $15.10^3$  taps l'accroissement de compacité est inférieur à 10 % de



la valeur finale obtenue. Différents états métastables sont obtenus dépendants de l'amplitude des secousses, avec des états finaux  $\Phi_\infty$  croissants avec l'amplitude  $\Gamma$ . Ce résultat est à mettre en parallèle avec les dynamiques de compaction obtenues par l'équipe de Chicago, dont l'état final croît aussi avec l'amplitude des sollicitations. Les courbes de compaction présentées sont des moyennes sur cinq réalisations, chaque expérience de compaction durant une dizaine d'heures sans les mesures acoustiques. Malgré l'incertitude liée au dispositif de mesure sur la valeur absolue de la compacité du milieu, les états finaux pour des sollicitations supérieures à  $\Gamma = 3$  n'atteignent pas des compacités supérieures à  $\Phi_{rcp} = 0.64$  et le milieu ne cristallise donc pas localement. Cette observation est d'autant plus surprenante que le choix de parois carrées semble faciliter la cristallisation aux bords du récipient. L'observation de l'empilement au niveau des parois transparentes a cependant confirmé une cristallisation locale (de l'ordre de 5 à 10 grains) en fin de compaction. Cette mise en ordre périphérique au récipient ne progresse pourtant pas de la base de l'empilement jusque la partie supérieure, comme il peut être attendu. Elle semble localisée à différents niveaux sur la hauteur de l'empilement. A priori, les grains ont tendance à s'ordonner à la base de l'empilement puis progressivement cet ordre se transmet aux couches supérieures de l'empilement. Une manière classique d'éviter ce phénomène est de créer une base rugueuse composée de grains collés de manière désordonnée pour éviter cette cristallisation. Ce dispositif n'a pas été testé dans ce travail.

Les courbes de compaction obtenues sont bien modélisées par la loi KWW (2.3) en exponentielle étendue. Le temps caractéristique de relaxation  $\tau$  du processus de compaction diminue lorsque l'amplitude des secousses augmente, passant d'un temps caractéristique  $\tau \sim 4900 n_{tap}^{-1}$  pour  $\Gamma = 1.5$  à un temps  $\tau \sim 470 n_{tap}^{-1}$  pour  $\Gamma = 3.5$ . La cinétique de compaction est ainsi assez proche de celle observée par l'équipe de Rennes mais le manque de données sur une large gamme d'amplitude  $\Gamma$  de sollicitations nous empêche de vérifier une loi linéaire entre  $\ln(\tau)$  et  $\Gamma^{-1}$ . Le paramètre  $\beta$  caractérisant l'étalement de la transition du processus de compaction vers l'état final varie entre 0.25 et 0.35 pour les trois sollicitations présentées. La cinétique de compaction observée est plus lente que pour les expériences menées à Rennes, mais proche des courbes de compaction de l'équipe de Chicago, malgré un rapport d'aspect plus grand pour nos expériences. Plusieurs causes peuvent expliquer ce phénomène très lent (plus de  $10^4$  secousses pour approcher l'état final). Tout d'abord, l'effet de la plaque posée sur l'empilement pour les mesures ultrasonores de compacité a tendance à ralentir la dynamique de compaction. La mise en tas est évitée, et la plaque assure une surface plane en haut de l'empilement, ce qui explique l'obtention de courbes de compaction très lisses. Les phénomènes convectifs sont ainsi limités et la compaction du système ralentie. Les parois carrées du récipient choisi influent aussi sur la dynamique de compaction avec une tendance au ralentissement comparé à l'emploi d'un récipient cylindrique [71]. Ces deux phénomènes couplés expliquent en partie le temps nécessaire à l'empilement pour atteindre son état final.

L'étude de l'influence de la taille des billes (figure 2.10) montre que pour une sollicitation égale  $\Gamma = 1.3$ , la cinétique de compaction est augmentée avec un temps caractéristique  $\tau \sim 550 n_{tap}^{-1}$  pour des billes de diamètre 0.7 mm contre  $\tau \sim 800 n_{tap}^{-1}$  pour les billes de 2 mm de diamètre. Il est supposé que la

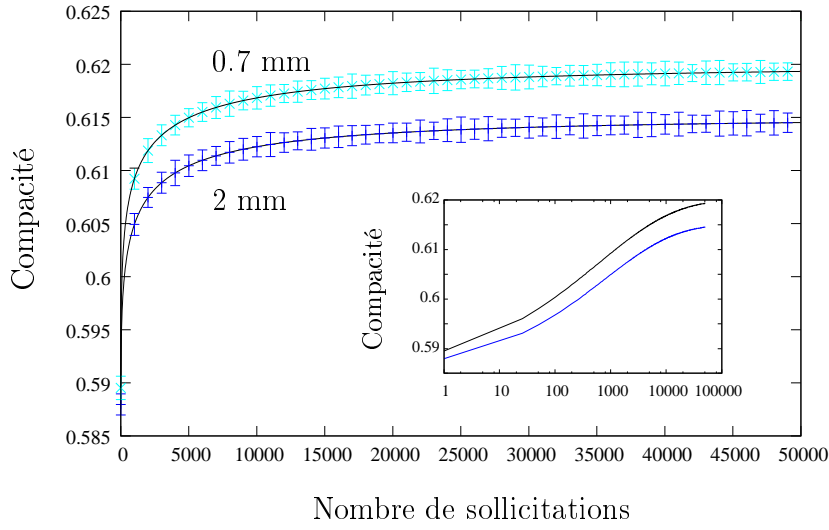


FIG. 2.10 – Effet de la taille des billes sur la compaction d'un empilement de billes de diamètre  $2\text{ mm}$  et  $0.7\text{ mm}$  à amplitude de sollicitation  $\Gamma = 1.3$ .

convection est accélérée avec la diminution de la taille des billes, ce qui peut expliquer l'augmentation du temps caractéristique  $\tau$ . A paramètre d'étalement  $\beta \sim 0.31$  équivalent, la compacité finale atteinte pour l'empilement de billes de  $0.7\text{ mm}$  de diamètre est supérieure de 0.5 à celle des billes plus grosses, ce gain de compacité pouvant provenir de la nette polydispersité observée sur la figure 2.8 comparée aux billes de  $2\text{ mm}$  de diamètre.

### *Bilan sur la compaction de milieux granulaires*

Après un exposé non exhaustif de la littérature existante sur la compaction granulaire, le dispositif expérimental a été présenté. La variation de compacité du milieu est obtenue par une mesure ultrasonore simple. Les états finaux de compacité du milieu différents selon l'amplitude de sollicitation sont observés, et l'effet de la taille des billes sur la dynamique de compaction discutée. D'après les courbes de compacité relative, les faibles variations de ce paramètre nécessitent une grande précision de mesure de sa valeur absolue pour caractériser géométriquement l'assemblage granulaire. Au bout de  $10^3$  sollicitations, l'accroissement de compacité est faible. Le milieu continue cependant de se réorganiser, au moins microscopiquement au niveau des contacts. Dans la suite du document, des ondes élastiques sont utilisées pour sonder le milieu, et observer la sensibilité des méthodes acoustiques par rapport aux méthodes classiques (optiques, capacitives) sur le processus de compaction. En premier lieu, la caractérisation linéaire du milieu est effectuée par des fonctions de réponse acoustique en fréquence de l'empilement. Dans le chapitre 3, des méthodes d'acoustique linéaire et non linéaire sont utilisées pour caractériser les différents mécanismes physiques se produisant au niveau des contacts, et leur évolution au cours du processus de compaction.

## 2.3 Caractérisation ultrasonore du milieu granulaire

Au cours de la compaction granulaire, deux transducteurs ultrasonores longitudinaux Panametrics V3052 sont utilisés pour sonder le milieu par des ondes élastiques. Ces transducteurs de rayon  $2\text{ cm}$  ont une réponse large bande centrée sur  $100\text{ kHz}$  et sont placés à environ  $7\text{ cm}$  du fond de l'empilement (voir la figure 2.6), pour éviter le flambement des parois latérales sous le poids des capteurs. La connaissance de la réponse en fréquence des transducteurs d'émission et de réception est nécessaire pour s'affranchir de leurs effets sur la mesure de la réponse du milieu. Ces capteurs n'ont pas de réponse plate en fréquence. Le domaine d'utilisation se situe sur le bord inférieur de leur bande passante, de  $1$  à  $80\text{ kHz}$ . La réponse en fréquence de ces capteurs est monotone jusqu'aux très basses fréquences (voir la figure 2.11). La linéarité de cette réponse avec l'amplitude du signal émis a été expérimentalement vérifiée par un vibromètre laser mesurant la vitesse à la surface du transducteur, pour des tensions variant de  $1\text{ V}$  à  $100\text{ V}$ . Un comportement non linéaire est clairement observé pour des fréquences très basses  $f < 500\text{ Hz}$  avec une forte atténuation du signal de sortie par rapport à la tension en entrée. Cependant, la limite fréquentielle inférieure dans cette étude est  $f \simeq 900\text{ Hz}$ , et les non-linéarités acoustiques observées n'ont pas pour origine la chaîne de mesure.

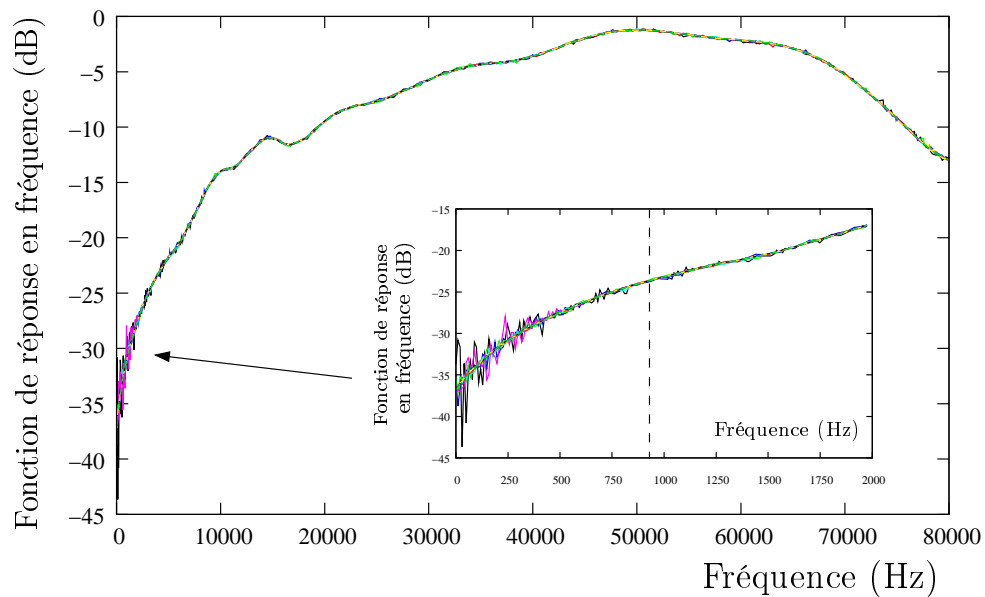


FIG. 2.11 – Fonctions de réponse en fréquence des transducteurs ultrasonores sur la gamme de fréquence étudiée pour différentes tensions d'excitations, normalisées par l'amplitude électrique d'excitation. La réponse est linéaire jusqu'aux basses fréquences  $f \leq 500\text{ Hz}$ . Insert : Réponse en très basses fréquences et la limite fréquentielle d'étude  $900\text{ Hz}$ .

Les signaux électriques sont transmis à un amplificateur de puissance avec un gain de  $50\text{ dB}$  pour générer des ondes acoustiques sur une large gamme d'amplitude. Après passage dans le milieu granulaire, les signaux reçus par le capteur en réception sont amplifiés par un pré-amplificateur faible

bruit de gain maximum 60 dB, puis sont visualisés soit à l'aide d'un oscilloscope numérique après moyennage temporel, soit sur un analyseur de spectres pour observer les spectres d'amplitude ou les fonctions de réponse en fréquence.

### 2.3.1 Fonctions de réponse en fréquence

La procédure d'obtention des fonctions de réponse en fréquence du milieu est la suivante. Pour un état donné de compacité du milieu, la caractérisation ultrasonore consiste en un sinus glissant entre les fréquences 1  $kHz$  et 80  $kHz$  à amplitude acoustique fixe sur la gamme fréquentielle. La constante d'intégration du signal est choisie de telle sorte que la réponse à une pulsation  $\omega$  peut être considérée stationnaire. Pour s'affranchir de l'effet des capteurs sur la réponse obtenue, les fonctions de réponse en fréquence reçues sont corrigées par celles des capteurs. La figure 2.12 présente, pour un empilement de billes de diamètre 2  $mm$  et de compacité  $\Phi = 0.63$ , la fonction de réponse en fréquence du milieu reçue, puis celle affranchie de l'influence des transducteurs. Les fonctions de réponse en fréquence, uniquement caractéristiques du milieu, sont alors décalées vers les plus hautes amplitudes.

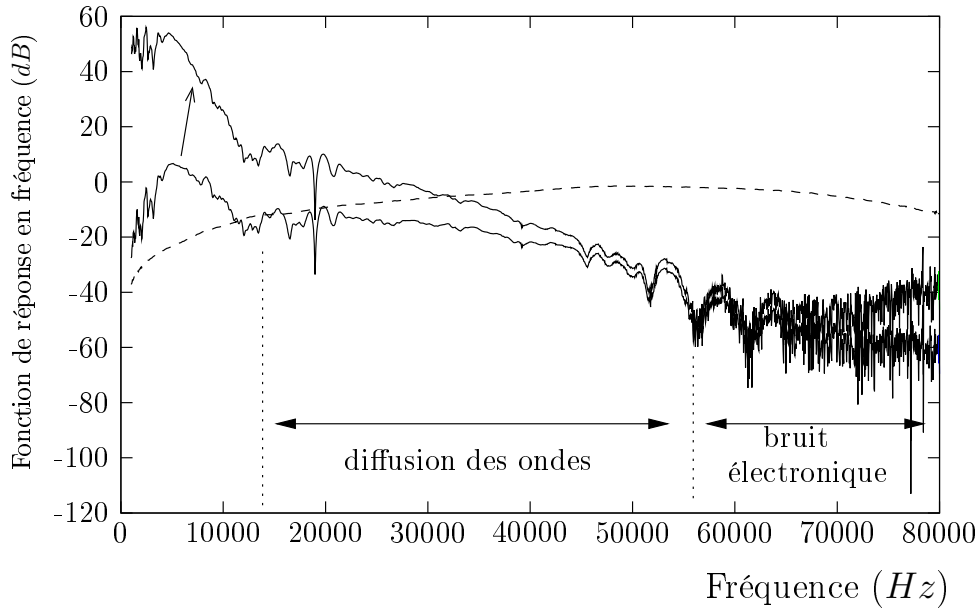


FIG. 2.12 – Fonction de réponse en fréquence du milieu granulaire corrigée par le fonction de réponse en fréquence des capteurs. Le milieu est composé de billes de verre de diamètre 2  $mm$ , pour une compacité de  $\Phi = 0.63$ .

Ces fonctions de réponse renseignent sur la transmission acoustique à travers le milieu, sur une large gamme fréquentielle. Il apparaît plusieurs zones distinctes dans la transmission :

- une gamme fréquentielle de forte transmission acoustique en basses fréquences, pour  $f \leq 10 \text{ kHz}$  environ,
- une gamme de transmission lentement décroissante pour des fréquences  $10 \leq f \leq 55 \text{ kHz}$ ,

- une partie fortement bruitée pour les hautes fréquences  $f \geq 55 \text{ kHz}$ , caractéristique du bruit électronique de la chaîne de mesure.

La première partie identifiée de ces fonctions de réponse en fréquence est une bande de transmission élevée, caractéristique de la propagation d'ondes au sein du volume du milieu. En basses fréquences, des pics de résonance du milieu émergent, puis la transmission chute brutalement pour une fréquence autour de  $8 \text{ kHz}$ . Cette fréquence de transition peut être qualifiée de fréquence de coupure pour les ondes propagatives. Dans le premier chapitre, la fréquence de coupure d'une chaîne de billes dans des conditions similaires de taille et de contrainte à cette expérience est estimée à  $f \simeq 50 \text{ kHz}$ . La fréquence de transition obtenue est ainsi très inférieure à celle de la configuration unidimensionnelle. Cet effet peut être attribuable au désordre du milieu.

Après la chute brutale de transmission des ondes acoustiques, une partie relativement lisse est identifiée. Sur cette gamme de fréquences,  $10 \leq f \leq 55 \text{ kHz}$ , aucun pic de résonance n'émerge. Cet effet est dû à la forte atténuation des ondes sur la distance parcourue entre les capteurs. En effet, une expérience menée dans un récipient plus large a permis de tester l'influence de l'écartement entre les capteurs sur la réponse fréquentielle du milieu. Pour un écart identique à celui de l'expérience de compaction  $L \simeq 8 \text{ cm}$ , la fonction de réponse en fréquence obtenue est identique. Lorsque les capteurs sont ensuite rapprochés, les seules modifications nettes sur la réponse fréquentielle du milieu apparaissent sur cette gamme de fréquences, où plusieurs modes du système émergent. L'effet d'atténuation des ondes est ainsi amplifié dans notre configuration expérimentale, en plus du caractère fortement dissipatif du milieu granulaire non consolidé. Des phénomènes de diffusion multiple des ondes peuvent alors expliquer l'atténuation observée.

### 2.3.2 Influence du processus de compaction

L'effet du processus de compaction d'un empilement granulaire est en premier lieu observé sur les fonctions de réponse en fréquence du milieu. Pour cela, puisque le processus de compaction est logarithmique avec le nombre de sollicitations, les mesures acoustiques sont effectuées à différentes étapes de la compaction du milieu logarithmiquement espacées dans le temps. La figure 2.13 présente les fonctions de réponse en fréquence du milieu granulaire constitué de billes de diamètre  $2 \text{ mm}$ , pour les états initiaux  $\Phi \simeq 0.585$  et finaux  $\Phi \simeq 0.63$ . La transmission acoustique augmente en amplitude, et la fréquence de coupure effective, identifiée dans la section précédente, se déplace vers les plus hautes fréquences de manière monotone avec le nombre de sollicitations. Cet effet a pour origine l'augmentation du module élastique linéaire du milieu, qui peut résulter de l'augmentation du nombre de contacts. Les pics de résonance, en très basses fréquences, se décalent de même vers les plus hautes fréquences. L'étude de la première résonance du milieu sera effectuée dans le chapitre suivant. La transmission acoustique semble ainsi particulièrement sensible à l'effet de densification du milieu pour les fréquences  $f \leq 10 \text{ kHz}$ . En effet, la gamme fréquentielle  $10 \leq f \leq 55 \text{ kHz}$  présente de faibles variations en amplitude sur la transmission acoustique.

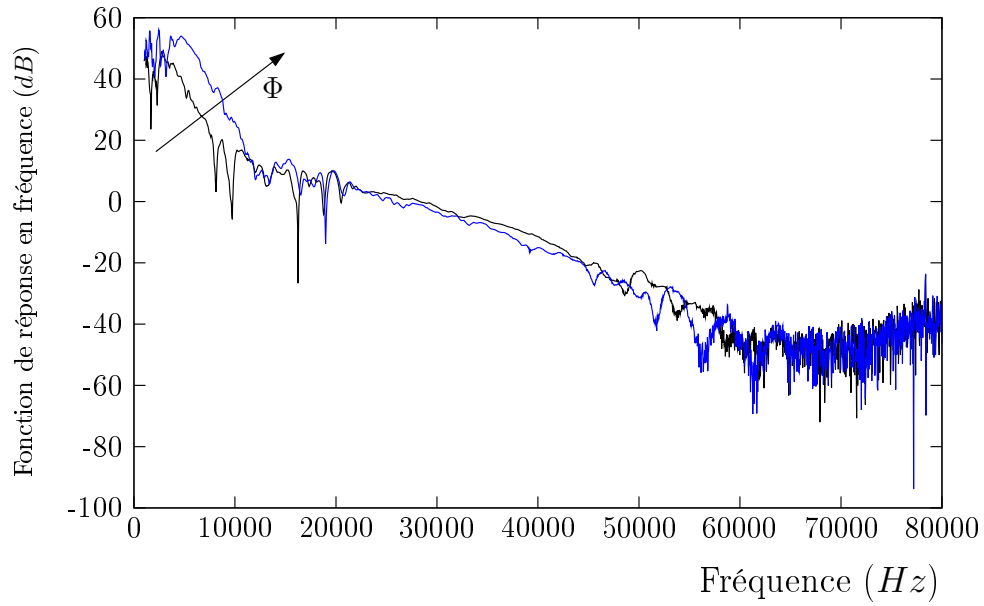


FIG. 2.13 – Evolution de la fonction de réponse en fréquence du milieu composé de billes de diamètre  $2\text{ mm}$  avec la compaction de l'empilement.

### 2.3.3 Influence de la taille des billes

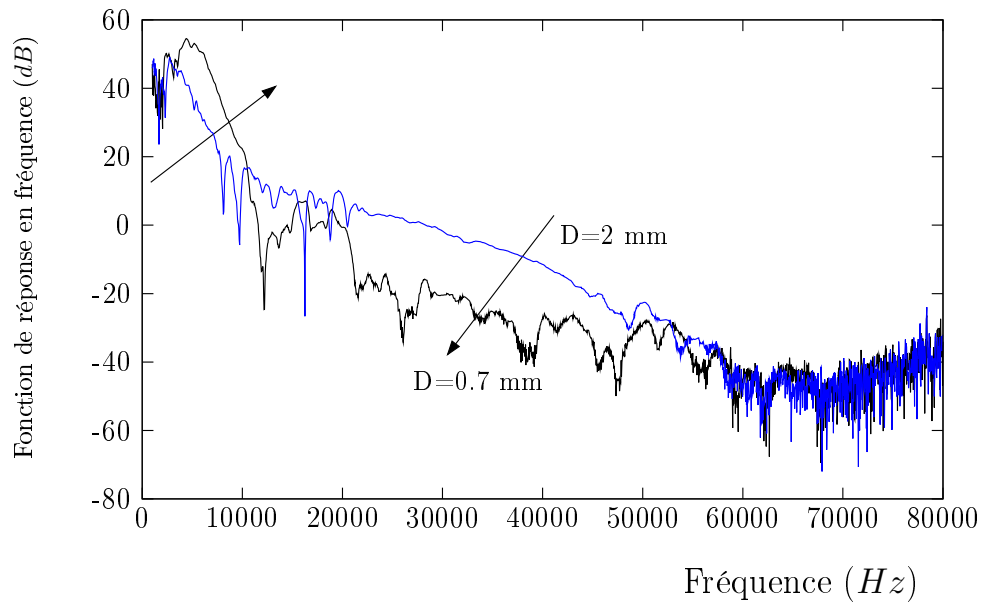


FIG. 2.14 – Fonctions de réponses en fréquence du milieu initialement peu compact  $\Phi = 0.585$  pour des empilements de billes de verre de diamètre  $2R = 0.7\text{ mm}$  et  $2R = 2\text{ mm}$ .

L'influence de la taille des billes sur la compaction a montré une cinétique plus rapide, et un état final plus compact pour des billes de diamètre  $0.7\text{ mm}$  que pour les billes de diamètre  $2\text{ mm}$ . La taille de billes choisies a aussi une influence directe sur la propagation acoustique. En effet, l'étude, dans le premier chapitre, d'une chaîne de billes unidimensionnelle montre que la fréquence de coupure de la chaîne augmente avec la diminution du rayon des billes (1.9). De même, la vitesse de phase des ondes en basses fréquences est plus élevée 1.10. Les fonctions de réponse en fréquence mesurées pour des billes de diamètre  $2\text{ mm}$  et  $0.7\text{ mm}$  sont présentées sur la figure 2.14, pour l'empilement granulaire initialement peu compact  $\Phi \simeq 0.585$ . Les trois gammes fréquentielles identifiées auparavant sont toujours présentes, avec une fréquence de coupure pour les billes de diamètre  $0.7\text{ mm}$  supérieure à celle des billes plus grosses. Au delà de cette fréquence de coupure, la transmission dans les petites billes est plus faible que pour les billes de diamètre  $2\text{ mm}$ , et la réponse en fréquence est moins lisse et présente des résonances et antirésonances plus marquées. La baisse de transmission, présente pour un empilement granulaire compacté  $\Phi \simeq 0.63$  (figure 2.15), peut être attribuée à l'augmentation de la dissipation puisque, pour des billes de diamètre  $0.7\text{ mm}$ , le nombre de contacts est plus élevé au sein du milieu et ainsi les contacts dissipent plus (par des phénomènes de frottement, adhésion, glissement).

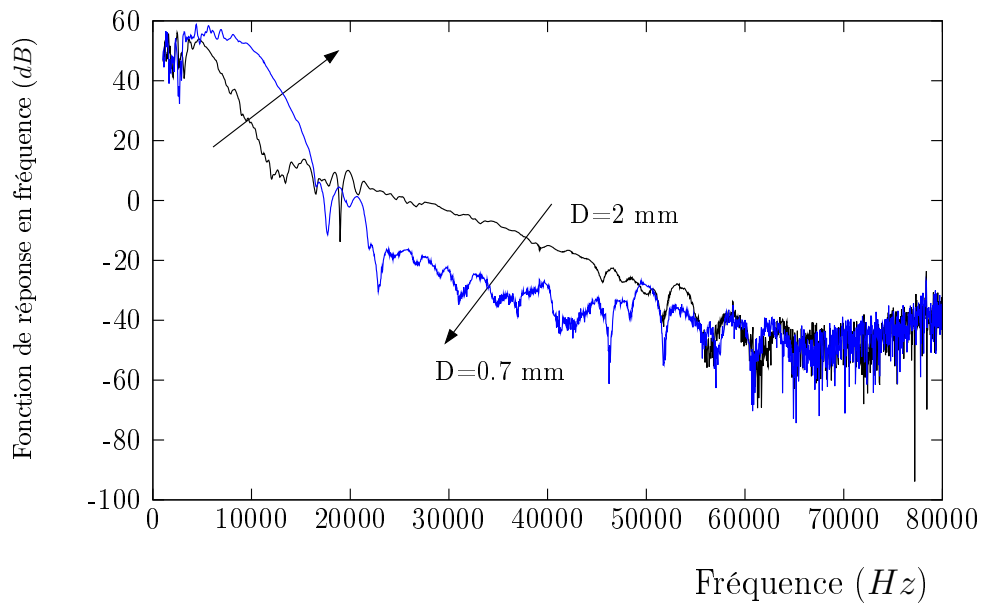


FIG. 2.15 – Fonctions de réponses en fréquence du milieu compacté  $\Phi = 0.63$  pour des empilements de billes de verre de diamètre  $2R = 0.7\text{ mm}$  et  $2R = 2\text{ mm}$ .

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la compaction d'un empilement granulaire a été étudiée. Après un exposé non exhaustif des travaux existants, notre dispositif expérimental de compaction a été présenté. Celui-ci consiste en un récipient contenant un assemblage granulaire constitué de billes monodisperses de diamètre  $2\text{ mm}$  ou  $0.7\text{ mm}$ . Le tout est excité à sa base mobile par un pot vibrant, délivrant des vibrations discrètes, ou taps, afin de réarranger le milieu. Une mesure ultrasonore simple est utilisée pour mesurer un paramètre macroscopique du milieu, la hauteur de la colonne granulaire, et ainsi obtenir la variation relative de compacité du milieu. Sous l'effet des sollicitations discrètes, le milieu initialement peu compact ( $\Phi \simeq 0.585$ ) se densifie jusqu'à un état final dépendant de l'amplitude de la sollicitation. Ces états sont des états métastables, différents de la limite de compacité d'un milieu granulaire tridimensionnel, le "random close packing" de compacité  $\Phi = 0.64$ . La compaction est lente, se déroulant sur environ  $5.10^4$  taps. Cette densification a pour origine les réarrangements entre grains, diminuant avec la frustraton géométrique de l'empilement.

L'effet de la taille des billes a été testée sur le processus de compaction. Pour des billes de diamètre  $0.7\text{ mm}$ , la compaction de l'empilement est plus rapide que pour des billes de diamètre  $2\text{ mm}$ . L'état final atteint, à amplitude de sollicitations égale, est plus compact pour les billes de  $0.7\text{ mm}$ . Il est supposé que la convection est accélérée avec la diminution de la taille des billes, ce qui entraîne une cinétique de compaction plus rapide. Le gain en compacité est quant à lui attribué à la nette polydispersité des billes de  $0.7\text{ mm}$  comparée au caractère plus monodisperse des billes de diamètre  $2\text{ mm}$ .

Le dispositif de caractérisation ultrasonore de l'empilement consiste en deux transducteurs ultrasonores longitudinaux. Après une mesure de la fonction de réponse en fréquence de ces capteurs, le milieu granulaire est sondé à différentes étapes du processus de compaction. Les fonctions de réponse en fréquence du milieu granulaire non consolidé présentent différentes gammes fréquentielles de transmission acoustique. La première est une bande de forte transmission acoustique, caractérisée par une fréquence de coupure dont la valeur est attribuée au désordre du milieu du point de vue acoustique et en relation avec la taille des billes. Sur une gamme fréquentielle plus large au-dessus de cette fréquence de coupure effective, les ondes sont fortement atténuées. En fonction du processus de compaction, la fréquence de coupure observée se décale vers les plus hautes fréquences, ainsi que les premières résonances du milieu. Cet effet est attribuable à l'augmentation de rigidité du milieu (le module élastique linéaire). Cette première investigation acoustique du milieu est poursuivie dans le prochain chapitre par l'étude des non-linéarités acoustiques du milieu, et leur suivi au cours du processus de compaction.



## Chapitre 3

# Caractérisation non linéaire de l'empilement granulaire

### 3.1 Introduction

Le comportement non linéaire des roches et autres géomatériaux est aujourd'hui bien documenté [70, 69, 60]. Contrairement aux approximations linéaires des équations de l'acoustique décrivant bien le comportement des fluides ou des matériaux homogènes soumis à des excitations modérées, l'acoustique non linéaire décrit la propagation d'ondes pour de fortes excitations acoustiques. Dans le cas de milieux complexes, l'approximation linéaire des équations de l'acoustique ne suffit pas à décrire la grande variété de phénomènes observés : ondes de choc [64], hystérésis [32] et effets de dynamique lente (relaxation) par exemple. Il est alors nécessaire de sortir des approximations classiques des équations linéarisées même pour des excitations acoustiques modérées : c'est le cas de milieux fortement non linéaires comme les milieux granulaires non consolidés.

Un modèle physique adéquat pour décrire les roches doit prendre en compte la complexité de ces matériaux. Ceux-ci sont composés de particules (grains, billes) plus rigides que leurs interconnexions (jonctions entre grains). Ces jonctions, assimilables à des raideurs plus molles que les particules, sont sujettes à de fortes déformations qui causent localement une déviation du comportement linéaire du matériau. Elles participent alors principalement à la réponse non linéaire du milieu. Dans le cas des milieux granulaires, ces jonctions sont composées des contacts inter-grain. Ces contacts sont régis par la théorie de Hertz non linéaire (cf chapitre 1), avec une dépendance en puissance  $3/2$  de la force normale de chargement. D'autres non-linéarités mécaniques sont susceptibles d'apparaître dans la relation contrainte/déformation. Par exemple, la prise en compte de la friction et de l'adhésion au niveau des contacts résulte en une relation contrainte/déformation hystérétique. Lorsque l'onde acoustique est d'amplitude supérieure à la déformation statique moyenne des contacts, ceux-ci peuvent s'ouvrir sous l'action de l'onde acoustique (le clappement). Ces caractéristiques des milieux micro-inhomogènes fournissent une large variété de manifestations non classiques des non-linéarités liées au milieu.

Dans ce chapitre, différentes expériences acoustiques linéaires et non linéaires sont présentées pour permettre le suivi acoustique de la compaction du milieu granulaire. Au cours de ce processus, le milieu se rigidifie et les études numériques disponibles à ce sujet montrent une augmentation du nombre de coordination par billes [1]. Cette augmentation s'accompagne intuitivement de la création de contacts faibles, puisque ces nouveaux contacts ne peuvent directement partager la contrainte moyenne. Il existe cependant une grande variété de contacts faiblement chargés. La distribution statistique de contacts aux faibles déformations statiques comportent des contacts faibles qui peuvent à la fois présenter du glissement ou pas. La proportion des contacts exhibant du glissement relativement à ceux n'en présentant aucun peut varier avec la rigidification du milieu, cette variation résultant de la frustration géométrique de l'empilement. Les méthodes acoustiques non linéaires ont montré leur forte sensibilité à la présence de défauts relativement aux méthodes linéaires dans un grand nombre de situations. Ainsi la présence de contacts faibles au sein du milieu granulaire influence fortement les non-linéarités acoustiques. Au cours du processus de compaction, il est attendu que la rigidification du milieu s'accompagne d'une variation du nombre de contacts faiblement chargés et donc d'une variation des non-linéarités acoustiques. Les résultats présentés ont pour objectif de confirmer la forte sensibilité des méthodes d'acoustique non linéaire relativement aux méthodes linéaires à travers plusieurs phénomènes acoustiques (génération d'harmoniques, génération de fréquence différence et résonances non linéaires), et de montrer leur potentiel pour l'utilisation de nouvelles observables acoustiques lors du processus de compaction. L'implication des observations effectuées sur la physique de la compaction des milieux granulaires est discutée.

## 3.2 Génération d'harmoniques

La génération d'harmoniques supérieures d'une onde plane fondamentale émise dans le milieu est l'expérience non linéaire la plus classique pour observer la non-linéarité d'un échantillon. La forme de l'onde plane émise initialement dans le milieu subit des modifications au cours de sa propagation, par effet cumulatif. Puisque le module élastique du milieu (et donc la vitesse de propagation des ondes) dépend de l'état de contrainte, les compressions/dilatations sur une période de l'onde acoustique vont résulter en des variations de la vitesse locale de l'onde. Considérons le cas des milieux granulaires où la vitesse augmente avec la pression. La partie en compression de l'onde se propage alors plus rapidement qu'une partie en dilatation dont la vitesse diminue. L'onde initialement sinusoïdale est modifiée en onde en dents de scie. C'est ce phénomène, illustré sur la figure 3.1, qui est à l'origine de la génération d'harmoniques. Par conséquent, une composante monofréquentielle émise dans un milieu avec non-linéarité quadratique subit une distorsion modifiant son spectre acoustique par l'apparition de plus hautes fréquences que la fréquence initialement introduite.

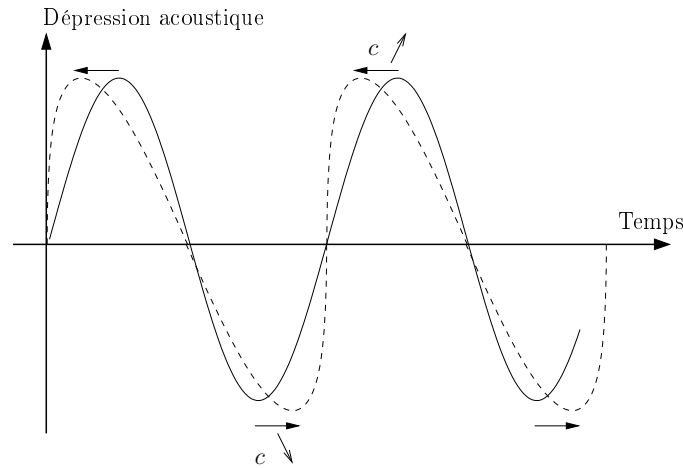


FIG. 3.1 – Distorsion de l'onde acoustique initialement sinusoïdale (en trait plein) en une onde en dents de scie (en pointillés) après propagation dans un milieu non linéaire quadratique.

Avec le même dispositif expérimental que celui introduit au chapitre 2, une onde plane sinusoïdale de fréquence fondamentale  $f_1 = 10 \text{ kHz}$  est émise dans le milieu granulaire au moyen des transducteurs ultrasonores longitudinaux. Un filtre passe-bas, d'ordre 2 centré sur  $15 \text{ kHz}$ , est utilisé pour éviter l'émission d'harmoniques supérieures de la fréquence fondamentale. Le choix de la fréquence d'excitation est issu des fonctions de réponse en fréquence présentées au chapitre 2. En effet, la forte atténuation des hautes fréquences empêche l'observation des harmoniques supérieures d'une composante fréquentielle trop élevée. Il est rappelé que la propagation d'ondes s'effectue sur une distance  $L \simeq 8 \text{ cm}$  entre les capteurs.

Pour obtenir la dynamique en amplitude des composantes fréquentielles générées, une gamme

d'amplitude acoustique de déformation  $5.10^{-7} \leq \varepsilon \leq 10^{-5}$  est appliquée. Chaque mesure acoustique, comprenant la génération d'harmoniques et sa dynamique en amplitude, est effectuée à des états de compaction répartis logarithmiquement en fonction du nombre de taps. Ainsi, les mesures acoustiques effectuées aux premières étapes de compaction (où la compacité du milieu varie) sont espacées d'une dizaine de secousses jusqu'à  $n_{tap} \leq 5.10^2$ , puis d'une centaine de secousses pour  $5.10^2 \leq n_{tap} \leq 5.10^3$ , et de  $10^3$  nombres de taps ensuite. Aux faibles déformations acoustiques  $\varepsilon \leq 10^{-6}$ , seule la fréquence fondamentale est présente dans le spectre après propagation. Pour les déformations acoustiques supérieures, des composantes fréquentielles autres que la fréquence fondamentale apparaissent. Les spectres expérimentaux de la figure 3.2(a) présentent, pour les états initiaux et finaux de compaction, l'enrichissement du spectre par les fréquences multiples du fondamental  $f_1 = 10 \text{ kHz}$ . Le comportement non linéaire du milieu granulaire est clairement visible. Au début du processus de compaction,  $t = 10^0$  tap, les fréquences multiples  $2f_1$  et  $3f_1$  émergent du bruit de mesure ainsi que le sous harmonique  $f_1/2 = 5 \text{ kHz}$ . Pour les fréquences  $f \leq 8 \text{ kHz}$ , un bruit basse fréquence est visible. Le transfert de l'énergie de l'onde fondamentale émise vers les basses fréquences a déjà été observé [84], attribuant le phénomène de doublement de période et la route vers le chaos observés à l'interaction de l'onde acoustique avec une distribution de contacts fortement non linéaires. Après une séquence de  $5.10^4$  secousses, le spectre acoustique est encore enrichi et présente de nombreuses composantes fréquentielles autre que les multiples du fondamental  $f = 10 \text{ kHz}$ . Le niveau de bruit électronique, visible à  $50 \text{ kHz}$ , est plus élevé et le bruit basse fréquence est plus étendu fréquentiellement. Ce phénomène semble fortement corrélé au comportement des fonctions de réponse en fréquence. Le spectre fréquentiel étant plus riche en fin de compaction, il apparaît que les non-linéarités acoustiques augmentent. La fréquence fondamentale choisie  $f = 10 \text{ kHz}$  appartient à la bande de forte transmission observée sur les fonctions de réponse en fréquence. Par conséquent, c'est l'augmentation de la transmission acoustique avec la compaction qui peut expliquer l'enrichissement spectral. L'effet de l'atténuation linéaire sur la génération d'harmoniques n'a pas été poursuivie.

Sur la figure 3.2(b), la dynamique en amplitude des composantes  $f_1$ ,  $2f_1$  et  $3f_1$  est présentée en fonction de l'amplitude acoustique  $A_1$  de l'onde émise. La dépendance en amplitude de la composante fondamentale est linéaire, celle du second harmonique  $2f_1$  est quadratique avec l'amplitude acoustique du fondamental. Ce résultat concorde avec une non-linéarité quadratique classique, et permet l'extraction du paramètre non linéaire quadratique  $\beta$ . Ce raisonnement est exact en l'absence d'absorption des ondes. Dans notre cas où un changement d'atténuation est observé pour les fréquences de pompage, le paramètre non linéaire quadratique évalué est une simplification du problème physique pour quantifier la non-linéarité acoustique. Pour une relation contrainte/déformation non linéaire classique, c'est-à-dire développable en puissance successives de la déformation, les harmoniques 2 et 3 générées ont une dépendance quadratique et cubique avec l'amplitude de la fréquence fondamentale émise. La dépendance en amplitude de la fréquence  $3f_1$  montre un comportement non classique de la relation d'état. En effet, sa dynamique en amplitude est proche d'une puissance  $3/2$ . Ce phénomène peut être attribué à l'accumulation de différentes non-linéarités classiques (non-linéarité quadratique et cubique) et non classique (hystérétique). Le caractère non classique des processus acoustiques non linéaires existant au

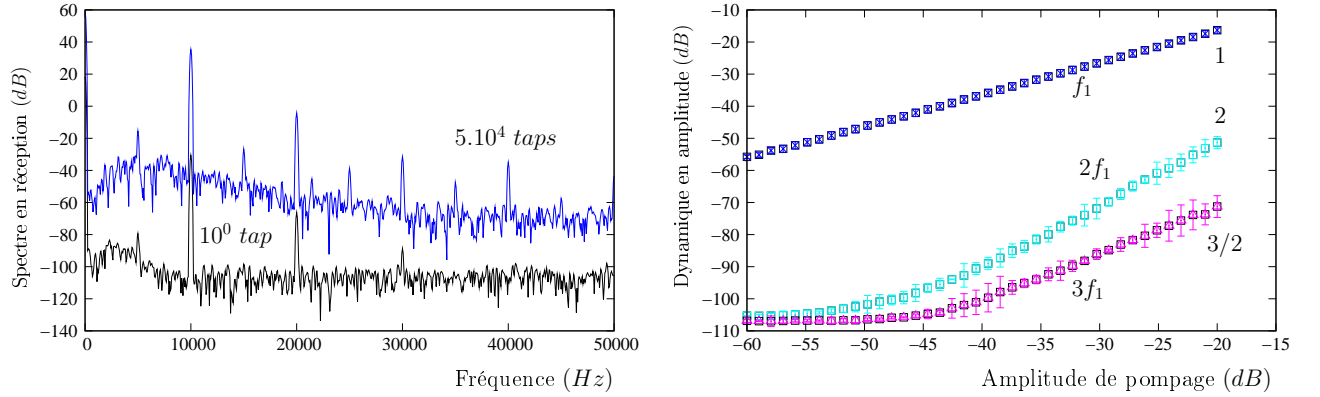


FIG. 3.2 – (a) : Spectres reçus après propagation de la composante fréquentielle  $f_1 = 10 \text{ kHz}$  pour une amplitude d'excitation acoustique  $\varepsilon_{ac} \simeq 10^{-5}$ . Les états initiaux et finaux de compaction sont présentés. (b) : Dynamique en amplitude de la composante fréquentielle  $f_1 = 10 \text{ kHz}$  et de ses deux harmoniques supérieures. Le comportement non linéaire non classique de l'harmonique 3 proche de la puissance  $3/2$  est observé.

sein du milieu granulaire seront développés en section 3 de ce chapitre.

Pour le moment, seul le premier terme non linéaire  $\beta$  de l'équation d'état développée en série de Taylor est considéré. Cette approximation est valide pour l'analyse de l'harmonique 2 dont la dépendance en amplitude est quadratique avec l'amplitude du fondamental. L'évaluation du paramètre non linéaire  $\beta$  est généralement la première étape pour quantifier la non-linéarité acoustique d'un milieu. Typiquement le paramètre non linéaire  $\beta$  se situe entre  $10^3$  et  $10^4$  pour les roches [60], comparé aux valeurs typiques 1 – 10 des milieux cristallins ou homogènes à l'échelle microscopique [34, 64]. Par exemple, dans le cas unidimensionnel, l'équation de propagation pour le déplacement  $u(x, t)$  d'une onde longitudinale plane progressive selon la direction  $x$ , obtenue par la méthode des approximations successives,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2, \quad (3.1)$$

fait intervenir le paramètre non linéaire quadratique  $\beta$  de la relation contrainte/déformation. Cette équation, valide en l'absence d'atténuation, est une approximation non linéaire au second ordre en déformation  $\partial u / \partial x$ . Le terme du second membre de l'équation (3.1) est à l'origine de la création des fréquences somme et différence dans le cas d'une onde monofréquentielle initiale. En résolvant l'équation de propagation (3.1) pour la première interaction non linéaire avec une onde monofréquentielle de pulsation  $\omega$ , l'amplitude de l'harmonique de pulsation  $2\omega$  générée est linéaire avec la distance de propagation  $x$ , et quadratique avec la pulsation et l'amplitude du fondamental. La valeur du coefficient non linéaire  $\beta$  est alors accessible expérimentalement par la mesure de l'amplitude  $A_2$  de l'harmonique

$2\omega$  générée à une distance  $x$  du signal source d'amplitude  $A_1$  [87] :

$$\beta = \frac{8A_2c_0^2}{A_1^2\omega^2x}, \quad (3.2)$$

avec  $c_0$  la vitesse linéaire de propagation de l'onde de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $A_1$ . La distance entre les capteurs acoustiques est fixe ( $x \simeq 8 \text{ cm}$ ) dans notre cas. Pour la fréquence d'émission  $f_1 = 10 \text{ kHz}$  et une vitesse de propagation linéaire des ondes  $c_0 \simeq 200 \text{ m/s}$  en début de compaction, le paramètre non linéaire quadratique  $\beta$  est estimé à 2500. Cette valeur confirme la forte non-linéarité observée sur les spectres expérimentaux (figure 3.2(a)). La figure 3.3 présente l'évolution du paramètre non linéaire  $\beta$  au cours du processus de compaction, moyenné sur cinq réalisations. Les barres d'erreurs présentées représentent l'écart-type à la moyenne. Malgré une déviation statistique importante, l'évolution présente une décroissance monotone entre les états initiaux et finaux de compaction.

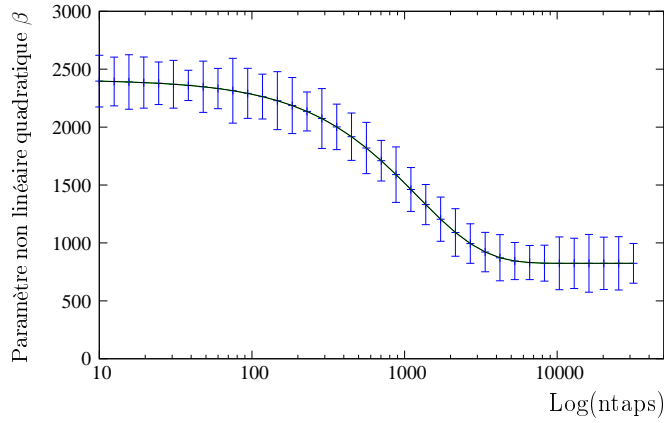


FIG. 3.3 – Paramètre de non-linéarité quadratique  $\beta$  en fonction du nombre de sollicitations. Les erreurs représentent l'écart-type obtenu sur cinq réalisations.

Le paramètre de non-linéarité quadratique issu de cette expérience présente des variations fortes au cours du processus de compaction (rapport 3 entre l'état initial et final de compacité). Cette diminution est attribuable, entre autres, aux variations linéaires des propriétés des ondes. Ainsi, suivant l'étude des fonctions de réponses en fréquence, l'amplitude de la fréquence fondamentale choisie augmente plus rapidement que celle de ses harmoniques supérieures au cours du processus de compaction. Une première difficulté d'interprétation se pose sur les propriétés linéaires des ondes. Cependant, une forte sensibilité du paramètre non linéaire est obtenue, comparée aux variations de compacité relative au cours d'une expérience. Puisque les fonctions de réponse en fréquence influent sur la compréhension des phénomènes physiques et sur l'extraction des paramètres non linéaires pour la génération d'harmoniques, la génération de fréquence différence à partir d'ondes de pompe hautes fréquences a été testée.

### 3.3 Génération de fréquence différence

Un effet acoustique illustrant les non-linéarités d'un milieu est l'interaction de deux faisceaux d'ondes ultrasonores de fréquences différentes  $f_1$  et  $f_2$ . Ce concept d'interaction onde-onde est à la base du développement des antennes paramétriques initiées expérimentalement et théoriquement par Westervelt [88] et Berktaÿ [8] dans les années 1960 et par Zverev et Kalachev (voir la référence [93] pour une revue) de manière théorique cette même décennie. Le principe consiste en premier lieu en la génération d'ondes acoustiques hautes fréquences (ondes primaires ou ondes de pompage) dans un milieu non linéaire par un transducteur ultrasonore le plus souvent. Ces ondes fournissent l'énergie acoustique au milieu et sont dans le cas le plus simple composées de deux hautes fréquences proches  $f_1$  et  $f_2$ , appelées ondes de pompage ou ondes primaires. Au cours de leur propagation, pour une non-linéarité suffisamment importante du milieu ou une distance d'accumulation suffisante, une partie de l'énergie des ondes primaires de fréquences  $f_1$  et  $f_2$  est transférée vers des fréquences inexistantes dans les sources initialement émises. Les fréquences  $2f_1$ ,  $2f_2$ ,  $f_1 + f_2$ ,  $f_2 - f_1$ ,  $f_1 - f_1$  et  $f_2 - f_2$  sont générées par la première interaction non linéaire des ondes, illustrée sur la figure 3.4. Puisque l'absorption des ondes acoustiques augmente avec la fréquence, les hautes fréquences  $f > f_1$  sont atténuées plus rapidement que les basses fréquences se propageant dans le milieu. Ainsi seule la fréquence différence  $\Delta f = f_2 - f_1$  est présente après une certaine distance de propagation.

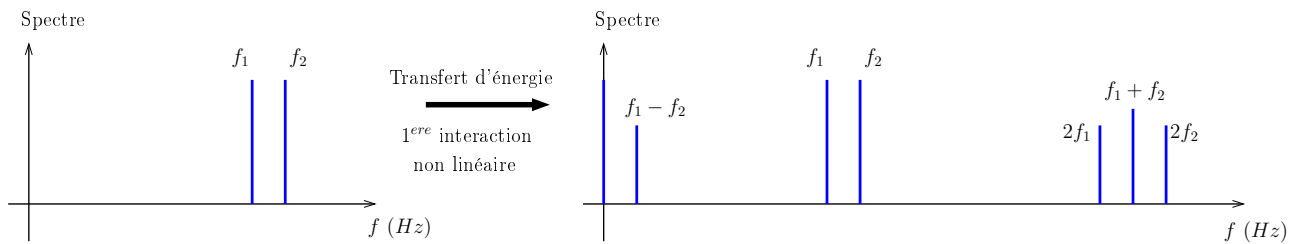


FIG. 3.4 – Principe de génération de fréquence différence après propagation des ondes primaires émises dans un milieu non linéaire. Les fréquences multiples  $2f_1$ ,  $2f_2$  et  $f_1 + f_2$  des ondes primaires sont généralement plus atténuées au cours de la propagation que la fréquence  $f_2 - f_1$ .

La génération de fréquence différence a été étudiée dans les milieux granulaires [91, 29, 85]. Le processus de génération de fréquence différence pour deux ondes primaires  $f_1$  et  $f_2$  est identique à l'onde auto-démodulée générée à partir d'un paquet d'ondes, observée dans le sable [91], pour des impulsions acoustiques (ou 'burst'). La conversion d'ondes de pompage de cisaillement vers des ondes autodémodulées longitudinales a ensuite permis de mettre en évidence le phénomène de dilatance non linéaire [85]. Cet effet permet de montrer l'anisotropie du paramètre de non-linéarité quadratique, induite par l'application d'une contrainte statique uniaxiale sur l'assemblage granulaire. Le réseau de chaînes de force induit par cette contrainte est alors préférentiellement dirigé dans la direction de la contrainte. Les contacts fortement pré-contraints sont dirigés selon ce réseau de chaînes de force, tandis que les contacts faiblement chargés sont principalement dirigés dans la direction orthogonale.

Dans notre dispositif expérimental, il est espéré que la génération de fréquence différence soit un phénomène sensible aux réarrangements du milieu. Le milieu granulaire considéré est sous contrainte statique dans la direction verticale (due à la gravité et la plaque réfléchissante posée sur la colonne). Par conséquent, la non-linéarité dans la direction horizontale (celle des mesures acoustiques pour les ondes longitudinales) doit alors être une mesure de la non-linéarité du milieu dans la direction orthogonale aux chaînes de force.

### 3.3.1 Résultats expérimentaux

Le dispositif expérimental est identique à celui des sections précédentes : le récipient est rempli de billes de verre de  $2\text{ mm}$  de diamètre soumises à la gravité. Les transducteurs sont placés près du fond du récipient, et à cette profondeur, la contrainte statique moyenne des contacts est estimée à  $3\text{ kPa}$ . Cette contrainte correspond à une déformation statique moyenne de  $3.10^{-5}$ . Cette valeur de déformation des contacts est ainsi supérieure (mais proche) à la déformation acoustique maximale  $\varepsilon_A \simeq 10^{-5}$ . Les expériences acoustiques consistent en l'émission d'un signal bifréquentiel (les ondes primaires) contenant les fréquences  $f_1 = 35\text{ kHz}$  et  $f_2 = 45\text{ kHz}$ , et à l'observation des spectres du signal reçu en fonction de l'amplitude d'excitation après propagation dans le milieu granulaire. En premier lieu, la même expérience a été réalisée dans l'air. La contribution de l'onde de fréquence différence générée  $f_2 - f_1 = 10\text{ kHz}$  est inférieure à  $-95\text{ dB}$  pour les excitations acoustiques d'amplitudes maximales, où  $0\text{ dB}$  correspond à un  $1\text{ V}$  en détection. Cet effet est possiblement dû à la faible non-linéarité du dispositif de mesure mais peut aussi provenir des effets non linéaires classiques dans l'air. La figure 3.5 présente la même expérience effectuée dans le milieu granulaire non consolidé en début de compaction. Le contenu spectral riche du signal reçu est bien une manifestation des non-linéarités du milieu granulaire.

Pour la plus faible amplitude d'excitation  $\varepsilon_A \simeq 7.10^{-7}$ , seules les deux hautes fréquences de pompage sont visibles dans le spectre reçu. Pour une excitation acoustique intermédiaire  $\varepsilon_A \simeq 4.10^{-6}$ , la fréquence différence  $f_2 - f_1 = 10\text{ kHz}$  émerge du niveau de bruit électronique. Cette fréquence différence est la manifestation du processus de mélange de fréquences décrit au-dessus. Les fréquences supérieures  $2f_1$ ,  $2f_2$  et  $f_1 + f_2$  ne sont pas observées dans le signal reçu à cause de la forte atténuation des ondes (déjà visible sur les fonctions de réponse en fréquence décrites dans le chapitre précédent). Les spectres présentés sont alors limités à la fréquence supérieure  $f = 50\text{ kHz}$ . Il est à noter que le sous-harmonique  $\Delta f/2 = 5\text{ kHz}$  de la fréquence différence est aussi présent, mais n'est pas décrit dans la première interaction non linéaire des différentes composantes fréquentielles. Enfin, pour les excitations acoustiques maximales de déformation  $\varepsilon_A \simeq 10^{-5}$ , d'autres composantes fréquentielles apparaissent :  $15$ ,  $20$  et  $25\text{ kHz}$  qui sont aussi des signes d'un processus de mélange de fréquence non classique. En basses fréquences, le spectre obtenu pour les amplitudes acoustiques maximales est un spectre de bruit. Celui-ci correspond à la forme de la fonction de réponse en fréquence du milieu présentée dans le chapitre précédent. Ce spectre de bruit basse fréquence a aussi été observé dans les expériences de génération d'harmoniques présentées auparavant.



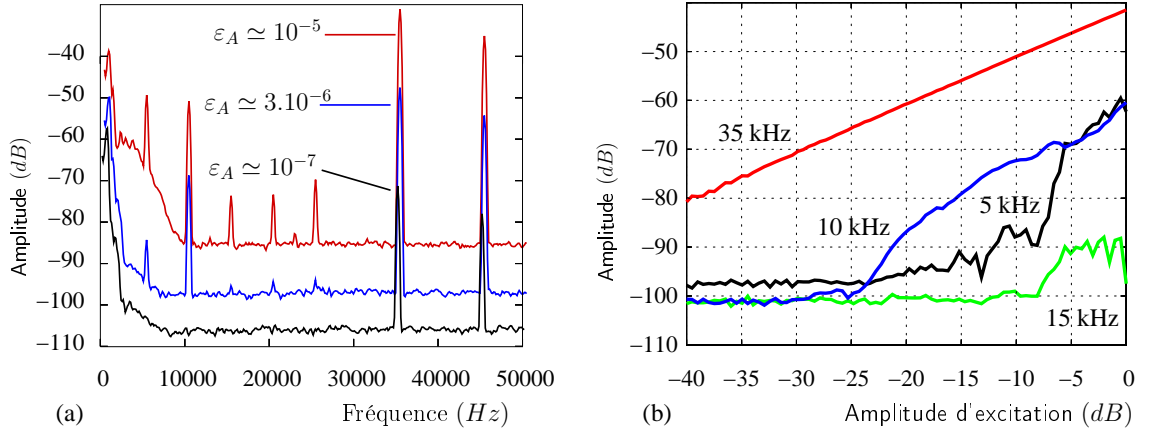


FIG. 3.5 – (a) : Spectres obtenus pour trois amplitudes d'excitation acoustique aux fréquences  $f_1 = 35$  kHz et  $f_2 = 45$  Hz (0 dB correspond à 1 V en détection). Les spectres sont décalés en amplitude pour plus de lisibilité. (b) : Dynamique en amplitude des composantes fréquentielles 5, 10, 15 et 35 kHz en fonction de l'amplitude acoustique d'excitation.

Pour déterminer le régime de fonctionnement de l'antenne paramétrique, il faut comparer deux longueurs caractéristiques acoustiques (longueur d'atténuation  $l_a$  et de diffraction  $l_d$  des ondes primaires). La longueur de diffraction d'un faisceau d'ondes de nombre d'onde  $k$  par un transducteur de rayon  $a$  est  $l_d = \frac{1}{2}ka^2$ , dans l'approximation de rayonnement gaussien. Dans cette expérience, pour  $a = 2$  cm,  $c \simeq 200$  m/s et  $f \simeq 40$  kHz, la longueur de diffraction  $l_d$  des ondes hautes fréquences est estimée à 25 cm. Les mesures d'atténuation issues d'expériences en ondes progressives sinusoïdales montrent que la longueur d'atténuation  $l_a$  des ondes de pompage est proche de 2 cm. Dans le cas où les ondes de pompage sont fortement atténuées et faiblement diffractées  $l_a \ll l_d$ , l'interaction non linéaire se produit principalement dans le champ proche de la source. Ce régime de fonctionnement est le régime de Westervelt [88]. Dans ce régime, l'onde de fréquence différence générée est d'amplitude proportionnelle au produit des amplitudes d'excitation ( $\sim A_{f_1} A_{f_2}$ ) et au paramètre de non-linéarité quadratique  $\beta$  du milieu, dans le cas où le milieu se comporte simplement et permet un développement en puissances de la relation contrainte/déformation.

La dynamique en amplitude des composantes fréquentielles présentes dans le spectre à la réception est présentée sur la figure 3.5(b). La dynamique des fréquences de pompage  $f_1 = 35$  kHz et  $f_2 = 45$  kHz montre une dépendance linéaire avec l'amplitude d'excitation, tandis que la fréquence différence  $f_2 - f_1 = 10$  kHz présente une dynamique en amplitude proche d'une dépendance quadratique. Pour les autres composantes fréquentielles, non générées par la première interaction non linéaire, la dynamique en amplitude n'est pas une loi en puissance et présente de fortes variations. Leurs amplitudes spectrales sont bien au-dessus du bruit électronique mais présentent des changements abruptes avec l'excitation acoustique croissante, qui ne permettent pas d'établir de conclusions. Malgré cette analyse sur les amplitudes difficile, le phénomène de génération de ces composantes fréquentielles sera analysé plus en

détail dans la suite de ce chapitre.

L'intérêt est maintenant porté sur l'évolution de la dynamique en amplitude de l'onde de fréquence différence au cours de la compaction du milieu granulaire.

### *Dynamique avec la compaction*

La figure 3.6 présente la dynamique en amplitude de l'onde de fréquence différence  $f = 10 kHz$ , en fonction de l'amplitude d'excitation mesurée à différentes étapes du processus de compaction granulaire. L'expérience de compaction consiste en une séquence de  $5 \cdot 10^4$  sollicitations du milieu granulaire à l'amplitude  $\Gamma = 2$ . Une augmentation de l'amplitude de l'onde de fréquence différence générée est observée. Cette croissance est monotone avec la compacité du milieu.

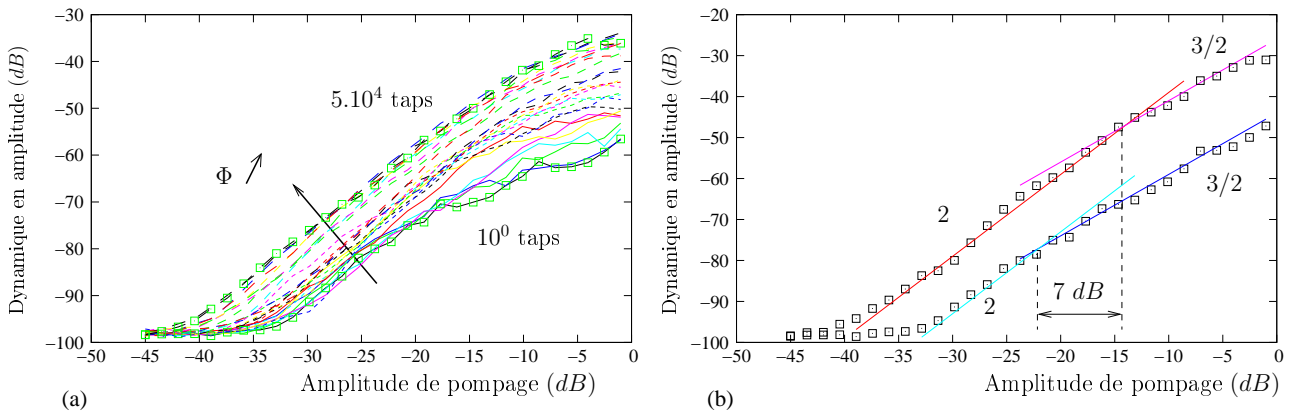


FIG. 3.6 – (a) : Dynamique en amplitude de l'onde de fréquence différence  $f_2 - f_1 = 10 \text{ kHz}$  en fonction de l'amplitude de pompe acoustique pour différents états de compacité croissante. (b) : Evolution de la transition  $2 \rightarrow 3/2$  de l'onde de fréquence différence moyennée sur cinq réalisations entre l'état initial et final de compacité ;

En première approche, ce résultat tend à montrer une augmentation de la non-linéarité quadratique  $\beta$  du milieu, ce qui contredit les observations effectuées dans les expériences de génération d'harmoniques (voir section précédente). Ce phénomène peut cependant s'expliquer par les dynamiques en amplitude linéaires des ondes de pompe et de fréquence différence générée. En effet, dans les expériences classiques d'auto-démodulation d'amplitude [85], le milieu granulaire testé est souvent soumis à une contrainte statique importante interdisant les réarrangements globaux de la structure du milieu. Les mesures de dynamique en amplitude effectuées et leurs interprétations sur la non-linéarité du milieu sont donc des mesures ponctuelles de l'état du milieu granulaire pour une contrainte statique donnée. Dans notre cas, le milieu évolue structurellement au cours de la compaction, et les propriétés linéaires de la propagation d'ondes varient comme l'ont montré les fonctions de réponse en fréquence (cf Chapitre 2). Le comportement de l'onde de fréquence  $f = 10 \text{ kHz}$  générée au cours de la compaction est ainsi indissociable du comportement linéaire en amplitude des ondes de pompe ( $f_1 = 35$  et  $f_2 = 45 \text{ kHz}$ )

et de l'onde de fréquence différence ( $f = 10 \text{ kHz}$ ). Pour les ondes de pompage hautes fréquences, la dépendance linéaire en fonction de l'amplitude d'excitation est observée. Mais le niveau en amplitude de ces ondes décroît au cours de la compaction de quelques  $dB$  ( $2/3 \text{ dB}$ ). Ces composantes fréquentielles se situent en effet sur la partie fortement atténuée des fonctions de réponse en fréquence, dans une gamme de fréquences où les amplitudes reçues évoluent très peu au cours du processus de compaction. L'onde de fréquence différence se situe elle dans la partie où la transmission est la plus forte. Cette bande de transmission présente une augmentation de niveau d'une dizaine de  $dB$  en moyenne au cours de la compaction, et des tests en propagation linéaire réalisés sur la composante  $f = 10 \text{ kHz}$  montrent une augmentation de son niveau d'environ  $25 \text{ dB}$  pour l'amplitude acoustique d'excitation maximale. Par conséquent, lors d'une expérience de génération de fréquence différence, l'amplitude des hautes fréquences diminue (et le résultat de leur interaction diminue de même) tandis que l'onde de fréquence  $f = 10 \text{ kHz}$  est mieux transmise dans le milieu. Pour les excitations acoustiques d'amplitude maximale, sur la figure 3.6, l'amplitude de l'onde de fréquence différence générée augmente de  $20 \text{ dB}$ . Les effets cumulés des comportements linéaires des composantes fréquentielles peuvent alors expliquer ces observations.

Il est une fois de plus nécessaire d'extraire un coefficient de non-linéarité quadratique affranchi des mesures linéaires. Cette partie de l'étude n'a cependant pas été menée à son terme. Il est en effet difficile d'obtenir expérimentalement le comportement linéaire de chaque composante fréquentielle ( $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_2 - f_1$ ) pour chaque état de compaction. Ces mesures doivent être effectuées en fonction de l'amplitude d'excitation acoustique, et un temps considérable (supérieure à la dizaine de minutes) est accordé à chaque mesure acoustique en plus du processus de compaction lui-même. De plus une modification des propriétés du milieu est sans nul doute possible pour la multitude d'essais acoustiques réalisés à chaque étape, ce qui peut altérer le processus de compaction du milieu granulaire. Pour ces raisons, au vu de ces résultats non linéaires préliminaires, l'accent est porté sur la description qualitative des résultats de génération de fréquence différence et son implication sur la physique de l'empilement granulaire.

### 3.3.2 Phénomène de clappement

Le processus de compaction s'accompagne d'une rigidification du milieu granulaire et d'une diminution de la non-linéarité quadratique comme l'ont montrées les expériences de génération d'harmoniques. Cette diminution peut être la conséquence de l'augmentation de la déformation statique moyenne des contacts et/ou de la diminution des contacts faibles dans l'empilement. En effet les méthodes acoustiques non linéaires sont plus sensibles aux contacts faibles du milieu (de raideurs faibles) qu'aux contacts forts (participant plutôt aux effets linéaires). La sensibilité des méthodes non linéaires à la présence de contacts faibles (en particulier dans les expériences d'antenne paramétrique [85]) s'observe sur le comportement de la dépendance en amplitude de l'onde de fréquence différence générée. Sur la figure 3.6(a), le comportement en amplitude de l'onde en fonction de l'amplitude d'excitation acoustique passe d'une dépendance initialement quadratique avec une

transition vers une croissance suivant une loi de puissance  $3/2$ . Cette transition est associée à une non-linéarité de Hertz avec clappement qui correspond à l'ouverture puis la fermeture du contact sous l'action de l'onde acoustique. Ce phénomène apparaît lorsque la déformation acoustique  $\varepsilon_A$  est supérieure à la déformation statique du contact  $\varepsilon_0$  considéré. Puisque, dans un milieu granulaire non consolidé, la déformation statique moyenne des contacts est faible (et dans la gamme des excitations acoustiques), la possibilité pour les contacts de 'clapper' sous l'action de l'onde acoustique est fortement envisageable. Pour obtenir ce comportement sur la dépendance en amplitude, il est nécessaire d'ajouter un degré de complexité dans la relation contrainte/déformation de Hertz dynamique

$$\sigma_0 + \tilde{\sigma} = C(\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon})^{3/2}, \quad (3.3)$$

avec  $C$  un paramètre tenant compte des paramètres du matériau, la contrainte dynamique  $\tilde{\sigma}$  (respectivement la déformation dynamique  $\tilde{\varepsilon}$ ) perturbant la contrainte statique  $\sigma_0$  (respectivement  $\varepsilon_0$ ). Par convention, ici, une compression  $\sigma > 0$  correspond à  $\varepsilon > 0$ . Lorsque la déformation acoustique est supérieure à la déformation acoustique d'un contact, celui-ci s'ouvre et 'clappe'. Pour modéliser le clappement, une fonction de Heaviside est introduite

$$\sigma_0 + \tilde{\sigma} = C(\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon})^{3/2} H(\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}). \quad (3.4)$$

A partir de l'équation (3.4) et par calcul du coefficient de Fourier de la contrainte associée à une excitation sinusoïdale  $\varepsilon_A \sin(\omega t)$ , il est possible de montrer qu'en l'absence de clappement (lorsque  $|\tilde{\varepsilon}| \ll |\varepsilon_0|$ ), l'amplitude de la fréquence différence est proportionnelle à  $\varepsilon_A^2$ . Un développement en série de Taylor de cette relation dans le cas limite  $|\tilde{\varepsilon}| \ll |\varepsilon_0|$  montre en effet que la non-linéarité dominante est la non-linéarité quadratique classique. Avec le phénomène de clappement  $|\tilde{\varepsilon}| \gg |\varepsilon_0|$ , la dépendance en amplitude de la fréquence différence est proportionnelle à  $\varepsilon_A^{3/2}$ . Dans ce cas, le développement en série de Taylor n'est plus possible (à cause du rôle singulier de la fonction de Heaviside) et seul le calcul par transformée de Fourier apporte la dépendance voulue. En introduisant un signal acoustique de déformation  $\tilde{\varepsilon}$  composé des fréquences  $f_1 = 35 \text{ kHz}$  et  $f_2 = 45 \text{ Hz}$ , il est possible de calculer la transformée de Fourier de la contrainte acoustique résultante  $\tilde{\sigma}$  associée à l'équation (3.4). Le résultat numérique est présenté sur la figure 3.7(a) pour les amplitudes spectrales obtenues, et sur la figure 3.7(b) les dynamiques en amplitude sont tracées. Il est remarquable que les fréquences obtenues numériquement à partir de l'équation (3.4) soient celles présentes dans les spectres expérimentaux de la figure 3.5, avec en particulier les fréquences  $f = 5 \text{ kHz}$  et  $f = 15 \text{ kHz}$ . Cette observation met bien en évidence le caractère fondamental de prise en compte du clappement. La principale différence entre les spectres expérimentaux et numériques présentés concerne les amplitudes spectrales associées à chaque composante fréquentielle, différence associée à la réponse en fréquence expérimentale du milieu granulaire. Pour la dépendance sur l'amplitude d'excitation acoustique présentée sur la figure 3.7(b), la dynamique de l'onde de pompage  $f = 35 \text{ kHz}$  est bien linéaire. Celle de la fréquence différence  $f = 10 \text{ kHz}$  présente une transition quadratique  $\rightarrow 3/2$  autour de  $0 \text{ dB}$  d'amplitude d'excitation, ce qui correspond à la déformation statique moyenne des contacts. De manière analogue aux résultats expérimentaux, la dynamique des fréquences  $f = 5 \text{ kHz}$  et  $f = 15 \text{ kHz}$  présente un comportement

plus complexe en amplitude et non monotone. L'analogie expérience-théorie permet alors une approche qualitative de l'évolution des phénomènes issus des interactions non linéaires présentées ici, en particulier l'évolution de la transition quadratique  $\rightarrow 3/2$  au cours de la compaction.

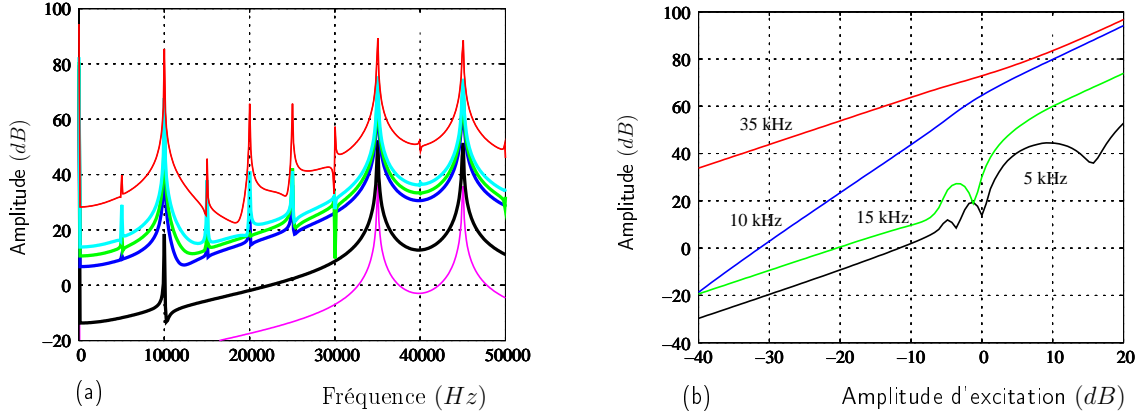


FIG. 3.7 – (a) Spectres obtenus par transformée de Fourier de la contrainte issue de l'équation (3.4) pour une excitation aux fréquences  $f_1 = 35 \text{ kHz}$  et  $f_2 = 45 \text{ kHz}$  et pour des amplitudes acoustiques d'excitation croissantes. (b) Dynamique en amplitude des composantes fréquentielles 5, 10, 15 et 35  $\text{kHz}$ , en fonction de l'amplitude acoustique pour une excitation aux fréquences  $f_1 = 35 \text{ kHz}$  et  $f_2 = 45 \text{ kHz}$ .

Sur la figure 3.6(b) est présentée l'évolution de la transition quadratique  $\rightarrow 3/2$  pour les états initiaux et finaux de compacité. En fin de compaction, la transition s'effectue pour une amplitude acoustique de pompage supérieure de 7  $\text{dB}$  à celle de la transition pour l'état initial. Ce comportement peut être du à :

- l'augmentation de la déformation statique moyenne des contacts  $\varepsilon_m$ , due à la rigidification du milieu,
- la variation au cours de la compaction de la distribution statistique de déformations des contacts  $n(\nu)$ , où  $\nu = \varepsilon_{\text{contact}}/\varepsilon_{\text{moy}}$  est le rapport de la déformation du contact considéré sur la déformation statique moyenne.

La modélisation de l'antenne paramétrique prenant en compte le phénomène de clappement (équation (3.4)) permet d'obtenir la contrainte dynamique associée à une excitation sinusoïdale. Les effets respectifs de la déformation statique moyenne des contacts et de la distribution statistique des contacts  $n(\nu)$  sur la dynamique de l'onde de fréquence différence générée sont à déterminer. Par conséquent, il faut considérer une répartition non homogène de la force transmise au sein du milieu granulaire. Pour cela, l'équation contrainte/déformation (3.4) est intégrée sur la distribution statistique de contacts

$$\sigma_0 + \tilde{\sigma} = C \int_0^{+\infty} n(\nu)(\nu\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon})^{3/2} H(\nu\varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}) d\nu. \quad (3.5)$$

Pour les déformations statiques supérieures à la déformation statique moyenne, le comportement de la

distribution statistique de contacts est bien modélisé par une décroissance exponentielle de la forme

$$n(\nu) \sim e^{-\alpha_1(\nu-1)^{\alpha_2}}, \quad (3.6)$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux constantes proches de 1, souvent  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = 3/2$ . Pour les faibles déformations statiques  $\nu < 1$ , la distribution de contacts est moins bien connue. Dans le cas général, les expériences dans les milieux granulaires ne permettent pas de mesurer les forces statiques très faibles entre billes  $\nu < 0.1$  et le comportement de la distribution de contacts aux faibles déformations statiques  $\nu \rightarrow 0$  n'est pas connu. En modélisant différentes distributions statistiques de contacts  $n(\nu)$  dans l'équation d'état (3.5), l'objectif est de retrouver qualitativement les variations de la transition  $2 \rightarrow 3/2$ . De telles simulations ont déjà montré leur potentiel [85], mais le problème inverse qui consiste à trouver la forme de la distribution de contacts à partir de la dynamique de croissance du signal de fréquence  $\Delta f$  est à priori difficile à mettre en oeuvre de façon précise. Par conséquent, seuls les effets des variations de la distribution de contacts (notamment des contacts forts puis des contacts faibles) sur la dynamique de croissance de l'onde basse fréquence (et en particulier sur la transition  $2 \rightarrow 3/2$ ) seront étudiés ici.

Pour cela, différentes formes de distributions de déformations de contacts sont modélisées, et la contrainte dynamique associée à ces distributions est calculée par l'équation (3.5). Pour des déformations statiques supérieures à la déformation statique moyenne, la forme de distribution (3.6) est employée. Pour les contacts faibles,  $\nu < 1$ , la distribution est partagée en deux zones d'influence. Pour  $0.1 < \nu < 1$ , la distribution de déformations est constante, de valeur  $n_2$ . Pour  $\nu < 0.1$ , la forme de la distribution est supposée constante, de valeur  $n_1$ . Cette zone représente, étant donné les faibles déformations statiques, des contacts très peu contraints, qui sont susceptibles d'être fortement glissants sous l'action d'une contrainte de cisaillement.

TAB. 3.1 – Influence de différentes formes de distributions statistiques de déformations de contacts sur la transition  $2 \rightarrow 3/2$  de la dynamique en amplitude de la fréquence différence  $f_2 - f_1$ .

Distribution de contacts	Contacts faibles	Contacts forts	Transition $2 \rightarrow 3/2$
contact fort $\nearrow$ $\alpha_1 \searrow$	$n_1 = 1, n_2 = 1$	$\alpha_1 = 1, 5, \alpha_2 = 3/2$	-1 dB
	$n_1 = 1, n_2 = 1$	$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3/2$	0 dB
	$n_1 = 1, n_2 = 1$	$\alpha_1 = 0, 5, \alpha_2 = 3/2$	+1 dB
contact faible $\nearrow$ $n_1 \nearrow, n_2 \nearrow$	$n_1 = 10, n_2 = 1$	$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3/2$	-2 dB
	$n_1 = 10, n_2 = 10$	$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3/2$	-5 dB
	$n_1 = 100, n_2 = 10$	$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3/2$	-7 dB

Le tableau 3.1 présente différentes formes de distributions de déformations de contacts et leur effet sur la transition  $2 \rightarrow 3/2$  de la dynamique en amplitude de l'onde de fréquence différence  $f_2 - f_1$ . La référence choisie pour la transition à 0 dB est obtenue pour une distribution constante  $n_1 = n_2 = 1$  pour  $\nu < 1$  et les valeurs classiques  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = 3/2$  pour la distribution (3.6) pour les déformations

statiques supérieures à la moyenne. En perturbant uniquement la forme de la distribution des contacts forts, les transitions obtenues sur la dynamique de l'onde basse fréquence varient de  $\pm 1$  dB. L'effet d'une variation des contacts forts sur la transition  $2 \rightarrow 3/2$  est ainsi négligeable. Maintenant, seules les formes de distribution aux faibles déformations statiques sont modifiées, par l'intermédiaire des valeurs  $n_1$  et  $n_2$ . Il apparaît qu'avec l'augmentation du nombre de contacts faibles dans le milieu, la transition  $2 \rightarrow 3/2$  est décalée vers les plus faibles amplitudes de pompage. Quantitativement, l'écart expérimental obtenu, 7 dB, entre l'état initial et final du processus de compaction, est retrouvé pour un nombre de contacts faibles très important  $n_1 = 100$  et  $n_2 = 10$ , relativement à la référence choisie. L'écart expérimental obtenu correspond ainsi à une diminution du nombre de contacts faibles dans le milieu. Cependant, les variations de transition pour les deux dernières distributions choisies dans le tableau 3.1 permettent de mettre en évidence l'influence des contacts très faiblement chargés. Le nombre relatif  $n_1$  de contacts faibles (susceptibles de glisser fortement) par rapport au nombre de contacts forts diminue ainsi au cours de la compaction. Cette observation, issue de la simulation numérique, sera traitée de manière plus approfondie dans la dernière section de ce chapitre.

### 3.3.3 Interaction non linéaire non classique

L'observation d'un contenu spectral riche lors des expériences de mélange de fréquences n'est pas classiquement observé pour un processus de mélange de fréquences classique. Les processus d'interactions non linéaires non classiques ont jusqu'ici été principalement étudiés pour le phénomène de génération d'harmoniques [81]. Dans cette section, le rôle du clappement sur les fréquences générées par interaction non linéaire non classique (observé sur la figure 3.7 par implémentation de la relation d'état (3.5)) est analysé par une modélisation théorique simple. Pour plus de détails le lecteur peut se référer à l'Annexe C, contenant l'article publié dans Ultrasonics.

Les résultats présentés sur les figures 3.5(b) et 3.7(b) sont obtenus pour une paire de fréquences d'excitation  $f_1 = 35$  kHz et  $f_2 = 45$  kHz. Cependant les composantes spectrales non issues d'un processus de mélange de fréquences sont fortement dépendantes de la paire de fréquences d'excitation choisie. L'effet du choix des fréquences d'excitation est présenté sur la figure 3.8 pour un grand nombre de données expérimentales. Chaque colonne correspond à des spectres dont les amplitudes sont codées en couleurs. Sur la figure 3.8(a), la fréquence  $f_1$  est fixée à 30 kHz et la fréquence  $f_2$  varie de 40 à 50 kHz. Sur la figure 3.8(b), chaque fréquence d'excitation varie, de 30 à 40 kHz pour  $f_1$  et de 40 à 50 kHz pour  $f_2$ . Sur la figure 3.8(c), la fréquence  $f_2$  est fixée à 40 kHz et la fréquence  $f_1$  varie de 30 à 40 kHz. La fréquence différence  $\Delta f$  générée est visible sur chaque spectre et suit l'évolution de la paire de fréquences choisie. En particulier, pour un écart constant de la paire de fréquences d'excitation sur la figure 3.8(b), la fréquence différence 10 kHz est fixe. Les fréquences contenues dans le spectre ne sont pas, pour certaines, générées par la première interaction non linéaire. Ces fréquences n'apparaissent de surcroît que pour quelques combinaisons de fréquences d'excitation (visible en basses fréquences sur les figures 3.8(a) et 3.8(b)). En regardant plus en détail les fréquences générées, il apparaît que les basses fréquences générées correspondent aux plus grands diviseurs communs (PGDC) des hautes fréquences d'excitation (et leurs harmoniques supérieures). Par exemple, pour les fréquences  $f_1 = 36$

$kHz$  et  $f_2 = 46 kHz$  (de PGDC  $2 kHz$ ), les fréquences 4 et 6  $kHz$  sont facilement observables. Cet effet est succinctement expliqué par un modèle simple avec non-linéarité de clappement.

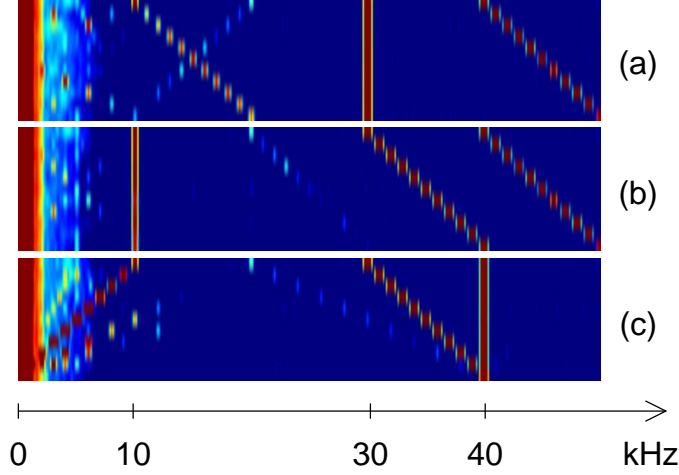


FIG. 3.8 – Spectres expérimentaux obtenus pour différentes combinaisons de fréquences d'excitation entre 30 et 50  $kHz$ .

Pour une faible non-linéarité, les modifications des spectres de signaux proviennent d'un processus classique de mélange de fréquences. Les premiers effets de génération non linéaires produisent alors les composantes  $f_1 + f_2$ ,  $f_1 - f_2$ ,  $2f_1$  et  $2f_2$ . Dans le cas d'une forte non-linéarité, la situation peut être complètement différente, comme observée auparavant. Les non-linéarités fortes comme le clappement ou les non-linéarités hystérétiques présentent des singularités dans la relation contrainte/déformation, qui peuvent être à l'origine des effets observés. Considérons un assemblage granulaire composé de cylindres. Le contact entre deux cylindres est élastiquement linéaire pour de faibles chargements [41], si le contact est fermé. Au contraire, un contact ouvert n'est pas contraint. Par conséquent, l'élément micromécanique considéré est fortement non linéaire. La prise en compte de l'ouverture du contact entre deux cylindres amène à la relation contrainte/déformation

$$\sigma = E\varepsilon H(-\varepsilon), \quad (3.7)$$

où  $E$  est le module élastique du contact et la convention  $\varepsilon > 0$  correspond à une compression du contact. En considérant une perturbation acoustique bifréquentielle, la déformation d'un contact entre deux cylindres s'écrit :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(\omega_2 t + \phi), \quad (3.8)$$

avec  $\varepsilon_{1,2}$  les amplitudes de déformation acoustique de pulsation  $\omega_{1,2}$  et  $\phi$  un terme de décalage de phase. D'après la relation d'état (3.7), la contrainte est nulle pour des déformations positives, et la réponse du système à la déformation appliquée est linéaire jusqu'à une valeur d'amplitude critique. D'après l'équation (3.8), cette valeur critique est atteinte lorsque  $\varepsilon_1 \cos(\omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(\omega_2 t + \phi)$  est égal à  $-\varepsilon_0$ . Au dessus de cette amplitude de déformation, le contact s'ouvre durant une période  $T_0 = t_2 - t_1$ ,



où  $t_1$  et  $t_2$  sont les bornes temporelles sur une période de l'onde acoustique où  $\varepsilon > 0$  (voir la figure 7 de l'annexe C). Cette ouverture du contact, à l'origine de l'absence de transmission acoustique, influence fortement le spectre de contrainte. En effet, sur cet intervalle de temps  $t_1 \leq t \leq t_2$ , la contribution non linéaire à la contrainte dynamique est forte et résulte en la modification du signal. Pour le signal de déformation (3.8), la période du signal total est égale au PGDC des deux fréquences émises. Si  $T_1 = 1/f_1$  et  $T_2 = 1/f_2$ , alors la période  $T$  du signal vaut  $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$  avec  $n_{1,2}$  des entiers les plus petits possibles. Le caractère localisé de la contribution non linéaire à la contrainte (d'une durée  $t_2 - t_1 \leq T$ ) assure que la forte non-linéarité excite de manière simultanée différentes composantes spectrales de fréquences  $F = m/T$ , avec  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Puisque les fréquences  $F$  peuvent être différentes de  $f_2 - f_1$ , les composantes fréquentielles générées diffèrent de celles obtenues par première interaction non linéaire (les fréquences  $f_1 + f_2, f_1 - f_2, 2f_1$ ).

La présence de la fonction de Heaviside dans la relation contrainte/déformation influence ainsi fortement, par ses singularités, sur le contenu spectral du signal acoustique reçu. La troncation du signal induite par cette fonction résulte en une contribution non linéaire à la contrainte dynamique, favorisant la génération de nouvelles composantes fréquentielles.

#### *Bilan sur les expériences non linéaires réalisées*

Les expériences de génération d'harmoniques et de génération de fréquence différence ont quantitativement montré une diminution des non-linéarités acoustiques au cours du processus de compaction. Avec les réarrangements du milieu et le gain en compacité, le nombre de coordination par billes augmente. L'augmentation du nombre de coordination s'accompagne de la création de contacts faibles, au moins dans un premier temps. Cependant, ces contacts faibles sont différemment chargés, et certains peuvent présenter du glissement. Parmi la création de contacts faibles glissants ou non, il est important de déterminer la proportion des contacts glissants relativement à ceux qui ne glissent pas pour comprendre leur influence sur les non-linéarités du milieu. La diminution des non-linéarités acoustiques a été observée sur le paramètre de non-linéarité quadratique  $\beta$  pour les expériences de génération d'harmoniques. Ensuite, pour le mélange de fréquence, la transition  $2 \rightarrow 3/2$  sur la dynamique en amplitude de l'onde de fréquence différence vers les plus hautes déformations statiques de contact est qualitativement interprétée par une modélisation numérique comme la diminution du nombre de contacts faibles. Mais il est aussi montré la difficulté d'obtenir des résultats affranchis des effets linéaires sur l'onde acoustique. En effet, les fonctions de réponse en fréquence introduites au chapitre 2 perturbent la compréhension des phénomènes acoustiques ayant lieu au cours de la compaction. Pour les expériences non linéaires réalisées jusqu'ici, le suivi acoustique de la compaction s'effectuait par des mesures à fréquence fixe (la fréquence fondamentale et ses harmoniques, la fréquence différence générée par les ondes de pompage) dont le comportement linéaire varie sur une expérience de compaction. Il apparaît alors qu'un suivi acoustique dynamique s'impose pour obtenir à la fois l'information linéaire et non linéaire sur la propagation acoustique. Ce suivi est réalisable au moyen de l'étude des résonances non linéaires du milieu, présentée dans la partie suivante.

## 3.4 Résonances non linéaires

### 3.4.1 Méthode de résonance

La méthode des résonances non linéaires est basée sur l'excitation et le suivi d'un ou plusieurs modes de résonance en fonction du niveau d'excitation de l'onde sonore. Un matériau homogène sans défaut présente une non-linéarité au niveau atomique provenant de la relation contrainte/déformation non linéaire. Cette faible non-linéarité est très inférieure aux non-linéarités rencontrées dans les roches et milieux granulaires, et pour ces raisons une augmentation du niveau d'excitation n'a très souvent aucune influence sur la valeur des fréquences de résonance du matériau. Pour un matériau hétérogène ou endommagé (micro-fissures, délamination), les non-linéarités intrinsèques du milieu vont affecter les courbes de résonance avec l'augmentation de la sollicitation acoustique (voir la figure 3.9). Par conséquent, la non-linéarité élastique influence les fréquences de résonance du système, tandis que la non-linéarité dissipative affecte la valeur de l'amplitude à la résonance ainsi que le facteur de qualité  $Q$  (largeur relative à  $-3$  dB de la courbe de résonance).

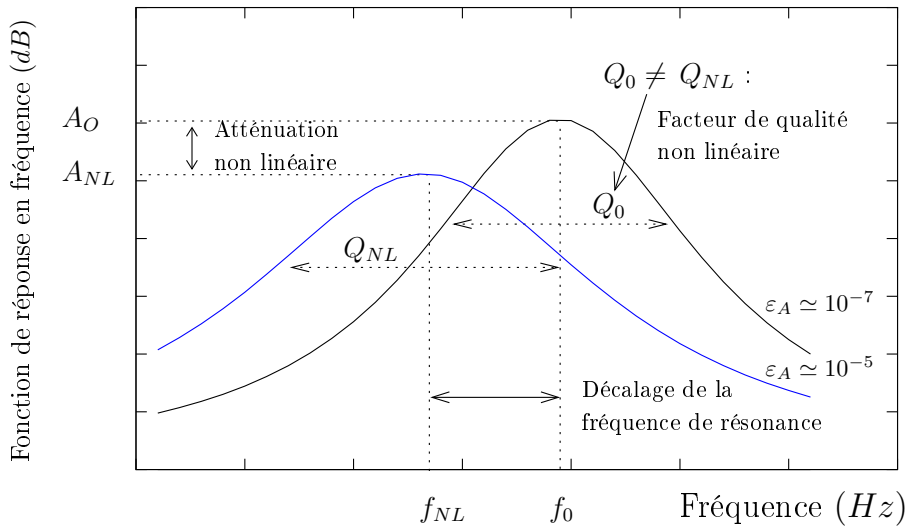


FIG. 3.9 – Effets des non-linéarités du milieu sur les courbes de résonance normalisées par l'amplitude acoustique émise.

### 3.4.2 Résultats expérimentaux

Le dispositif expérimental est identique à celui du chapitre précédent. Le milieu est constitué de billes de verre de diamètre  $2\text{ mm}$  ; la compacité initiale du milieu est estimée à  $\Phi = 0.585$  pour une hauteur de la colonne granulaire de  $20\text{ cm}$ .

Puisque la distance entre transducteurs est fixée, le milieu granulaire agit comme un résonateur de fréquence de résonance  $f_0 = \frac{c_0}{2L}$ , où  $c_0$  est la vitesse linéaire de propagation des ondes longitudinales

dans le milieu et  $L$  est la distance entre capteurs. Les capteurs étant plus rigides que le milieu, la première résonance s'effectue en demi-onde, soit une longueur d'onde à la résonance égale au double de la distance entre transducteurs. Pour  $L \simeq 8 \text{ cm}$  obtenu à partir des mesures de réponse en fréquence dans l'air, et une vitesse de propagation de l'ordre de  $160 \text{ m/s}$  en début de compaction, l'ordre de grandeur de la fréquence de résonance du premier mode est  $f_0 \simeq 1210 \text{ Hz}$ . Les résonances supérieures sont des multiples entiers de  $f_0$  et pour  $\lambda_{acous} = \frac{4}{3}L$ , le capteur en réception est situé à un noeud de vibration d'où une antirésonance à environ  $1875 \text{ Hz}$ . Les premiers modes de résonance du milieu granulaire sont identifiés sur la figure 3.10. Pour s'assurer que le pic de résonance à la fréquence  $f_0 \simeq 1210 \text{ Hz}$  est bien le premier mode de résonance, le milieu granulaire est précontraint légèrement pour observer le décalage de ce pic avec la contrainte (et l'augmentation de la vitesse linéaire des ondes longitudinales).

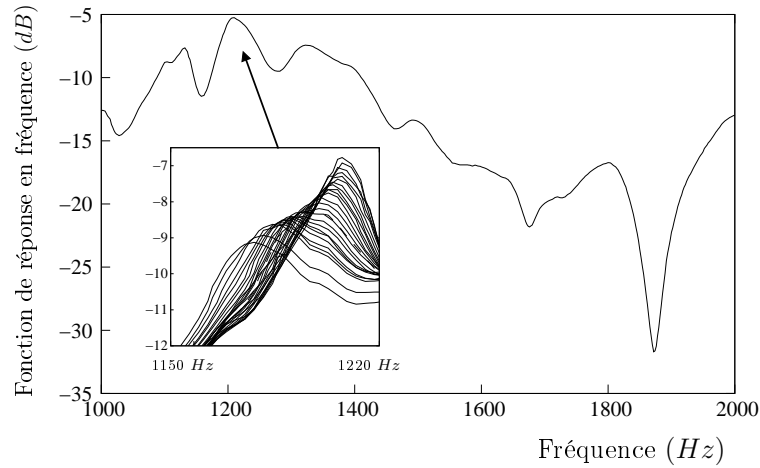


FIG. 3.10 – Fonction de réponse en fréquence à faible amplitude acoustique en début de compaction pour  $\Phi = 0.585$ . Insert : Courbes de résonance non linéaire du mode demi-onde de la cuve.

A faible amplitude acoustique d'excitation, les résonances observées se superposent et aucun décalage de fréquence de résonance ni de changement du facteur de qualité n'apparaissent. En dessous de la déformation acoustique critique  $\varepsilon_{crit}$  induisant une modification de la courbe de résonance, le milieu est dit linéaire. L'extraction de la fréquence de résonance linéaire et du facteur de qualité linéaire du milieu est alors possible par un ajustement Lorentzien de la courbe de résonance. Le milieu granulaire considéré étant non consolidé et uniquement soumis à son propre poids, les déformations statiques entre billes sont faibles et induisent une forte dissipation de l'onde au niveau des contacts. Ce phénomène se caractérise par des pics de résonance assez larges avec un facteur de qualité de l'ordre de  $20 \pm 3$ .

#### *Dynamique avec la compaction*

La figure 3.11 présente l'évolution des courbes de résonance du premier mode en fonction de la

compacité du milieu. Sur la figure 3.11(a), les courbes de résonance sont mesurées avant l'expérience de compaction du milieu granulaire, puis une séquence de  $5 \cdot 10^4$  taps à amplitude de sollicitation  $\Gamma = 2$  est réalisée en vue de suivre l'évolution des paramètres linéaires et non linéaires avec la compaction du milieu. L'effet de rigidification du milieu s'observe par le décalage vers les plus hautes fréquences de la fréquence de résonance linéaire (à faible amplitude acoustique) avec le nombre de secousses effectuées. Une fois la compacité du milieu stabilisée après une séquence de  $5 \cdot 10^4$  taps, les courbes de résonance (voir la figure 3.11(b)) présentent un aspect plus symétrique, et à la fois un décalage de fréquence de résonance et un élargissement de la largeur du pic de résonance inférieurs à ceux en début de compaction. Ces différentes caractéristiques, signes de non-linéarités, et leur évolution en fonction du processus de compaction, sont étudiées dans la suite de ce chapitre.

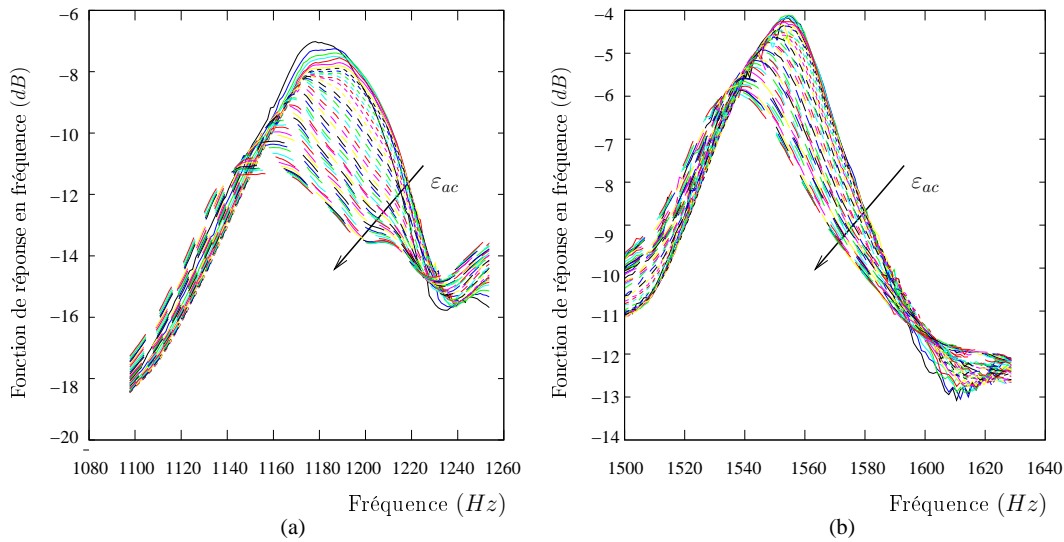


FIG. 3.11 – Courbes de résonances (normalisées par l'amplitude acoustique émise) du milieu granulaire pour (a) l'état initial du milieu granulaire  $\Phi \simeq 0.585$ , (b) le milieu granulaire compacté  $\Phi \simeq 0.63$  après une séquence de  $5 \cdot 10^4$  taps.

### 3.4.3 Suivi de la fréquence de résonance linéaire

Dans un premier temps, les propriétés acoustiques linéaires du milieu granulaire sont étudiées. La rigidification du milieu granulaire en cours de compaction résulte en l'augmentation du module élastique linéaire  $E_0$ . Puisque la distance  $L$  entre transducteurs est fixée, la fréquence de résonance linéaire  $f_0 = c_0/2L$  est proportionnelle à la vitesse linéaire des ondes longitudinales du mode considéré. L'augmentation du module d'Young linéaire  $E_0 = \rho_0 c_0^2$  est liée au gain en compacité, donc à l'augmentation de la masse volumique  $\rho_0$ , mais aussi à l'augmentation de la vitesse acoustique linéaire des ondes. La fréquence centrale du pic de résonance est extrait par un ajustement Lorentzien lorsque le milieu est considéré linéaire, c'est-à-dire pour des déformations d'excitation inférieures à  $\varepsilon \simeq 10^{-6}$ . Son évolution au cours du processus de compaction est représentée sur la figure 3.12(a) en fonction

du nombre de sollicitations. Le comportement est reproductible sur cinq réalisations de l'expérience de compaction à amplitude de sollicitation fixée. Pour l'état initial de l'arrangement granulaire, la fréquence de résonance linéaire vaut  $f_0 \simeq 1200 \text{ Hz}$  et évolue selon un processus logarithmique avec le nombre de secousses jusque la valeur finale  $f_0 \simeq 1580 \text{ Hz}$ , soit un accroissement de  $\simeq 30\%$ . La dynamique d'évolution de  $f_0$  est identique à la dynamique de la compacité étudiée au chapitre 2. Un ajustement avec la loi KWW utilisée pour la mesure de la compacité fournit alors les paramètres  $f_\infty = 1600 \text{ Hz}$ ,  $\Delta f_\infty = 560 \text{ Hz}$ ,  $\tau = 200 n_{tap}^{-1}$  et  $\beta = 0.2$ . L'exposant caractéristique de l'exponentielle étendue est du même ordre que pour la compacité  $\beta \simeq 0.25$ . Après une séquence de  $8.10^3$  secousses, aucune variation significative n'est observée. Le suivi des micro-arrangements se déroulant en fin du processus de compaction n'est ainsi pas accessible expérimentalement par une mesure linéaire.

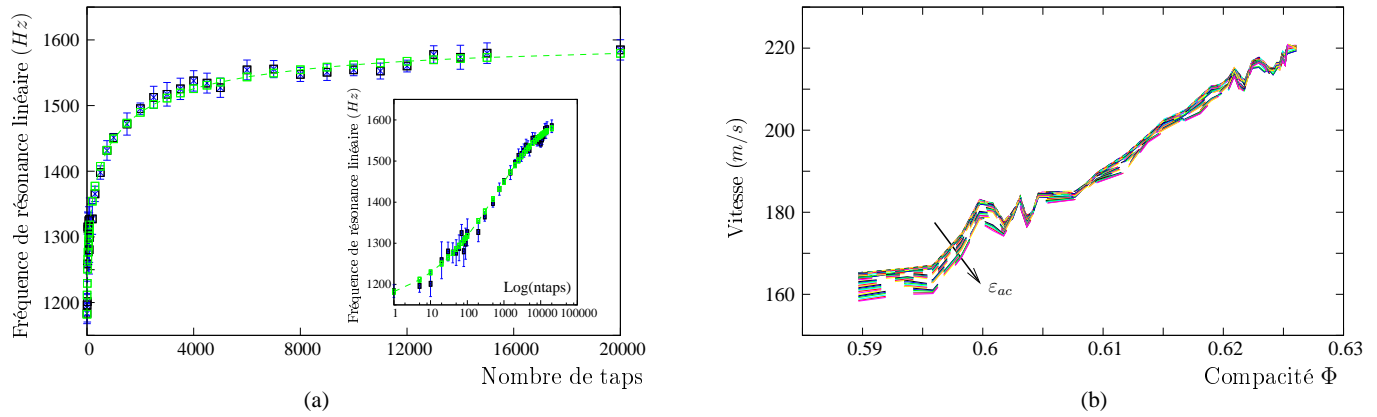


FIG. 3.12 – (a) Evolution de la fréquence de résonance linéaire  $f_0$  obtenue à faible amplitude d'excitation acoustique en fonction du nombre de secousses. (b) Vitesse des ondes longitudinales du mode 1/2-onde en fonction de la compacité du milieu granulaire. Le comportement non linéaire diminue au cours de la compaction.

A partir de la mesure de la fréquence de résonance linéaire, la vitesse des ondes longitudinales est obtenue par  $c_0 = 2Lf_0$ . La valeur de vitesse linéaire de propagation des ondes longitudinales est de  $\simeq 160 \text{ m/s}$  en début de compaction. Cette valeur de vitesse pour le milieu non compacté a été vérifiée par des mesures de temps de vol pour des impulsions acoustiques. La figure 3.12(b) représente l'évolution de la vitesse des ondes longitudinales avec la compacité du milieu pour des amplitudes acoustiques croissantes. La dépendance de la vitesse  $c_0$  avec la compacité du milieu est proche d'un comportement linéaire, avec pour valeur finale  $c_0 \simeq 220 \text{ m/s}$ . La dépendance linéaire de la vitesse  $c_0$  (mais aussi de la fréquence de résonance linéaire  $f_0$ ) avec la compacité du milieu montre, en dépit de la saturation observée aussi pour la mesure de compacité, que le problème inverse de détermination de la compacité du milieu granulaire par une mesure acoustique est réalisable. Alors que la variation de compacité est faible,  $\Delta\Phi \leq 5\%$ , les mesures acoustiques montrent une plus grande sensibilité à l'évolution structurale du matériau. En effet, la variation relative de vitesse (ou de fréquence) linéaire est de  $\simeq 30\%$  entre les états initiaux et finaux de compacité. Un dispositif acoustique de suivi de la compaction d'un réservoir

agroalimentaire, par exemple, est alors envisageable par une mesure acoustique linéaire de l'empilement. Mais une constatation limite les possibilités, à savoir que la faible contrainte de confinement (donc les faibles vitesses acoustiques) demande une grande précision de la mesure. Dans ce cas, seule la mise au point d'une méthode qualitative pour une application technique est envisageable.

L'évolution de la vitesse avec l'amplitude acoustique d'excitation est aussi présentée. La vitesse des ondes acoustiques diminue avec l'amplitude acoustique exhibant le phénomène de ramollissement du milieu sous l'action de l'onde acoustique. Avec l'augmentation de compacité, le décalage de la vitesse avec l'amplitude acoustique diminue. Pour  $\Phi = 0.59$ , le décalage de vitesse en fonction de l'amplitude acoustique est de 10 m/s, et devient non significatif pour les hautes compacités  $\Phi \geq 0.62$ . Cette approche sur les mesures de propriétés non linéaires du milieu laisse apparaître une diminution des non-linéarités au cours de la compaction, vérifiée par la suite avec la mesure du décalage de fréquence de résonance et de la variation du facteur de qualité des courbes de résonance.

#### 3.4.4 Softening<sup>1</sup> du milieu granulaire

Le décalage de la fréquence de résonance du milieu est une mesure sensible de la non-linéarité acoustique du milieu. En appliquant des excitations acoustiques croissantes, la fréquence de résonance peut augmenter ('hardening') ou diminuer ('softening') selon que le matériau se durcisse ou ramollisse sous l'action de l'onde acoustique. Ce phénomène renseigne alors sur les propriétés acoustiques non linéaires du matériau. Fondamentalement, les non-linéarités élastiques impliquent une équation d'état (ou relation contrainte/déformation) non linéaire. Dans le cadre de la théorie non linéaire classique de *Landau* [49], en supposant une relation d'état unidimensionnelle, la contrainte s'écrit en développement en puissances successives de la déformation

$$\sigma = E_0 \varepsilon (1 + \beta \varepsilon + \delta \varepsilon^2 + \dots), \quad (3.9)$$

où  $E_0$  est le module d'Young linéaire du matériau,  $\beta$  et  $\delta$  les paramètres non linéaire classiques du second et troisième ordre. Cette théorie s'applique à des matériaux faiblement non linéaires, soit  $\beta$  et  $\delta$  de l'ordre de 1 à 10. L'équation du mouvement en ondes de compression pour un problème unidimensionnel

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (3.10)$$

relie le déplacement normal  $u$  à la contrainte de compression  $\sigma$ . Puisque le milieu est supposé fortement non linéaire, la non-linéarité géométrique est négligée devant la non-linéarité physique de l'équation d'état du matériau et la déformation s'écrit  $\varepsilon = \partial u / \partial x$  en omettant les termes quadratiques de convection. En reportant l'équation d'état (3.9) dans l'équation (3.10), l'équation du mouvement est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (3.11)$$

---

<sup>1</sup> Le terme anglais 'softening' est généralement utilisé dans la littérature pour décrire la diminution du module d'Young du matériau avec l'augmentation de l'amplitude acoustique; un équivalent en français est le ramollissement du milieu.

avec la vitesse des ondes  $c$  défini par

$$c^2 = c_0^2(1 + \beta(\frac{\partial u}{\partial x}) + \delta(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \dots), \quad (3.12)$$

où  $c_0^2 = E_0/\rho_0$  est la vitesse linéaire des ondes. La vitesse  $c$  d'une onde dépend ainsi du niveau de déformation  $\varepsilon = \partial u/\partial x$ , et son sens de variation avec l'excitation acoustique dépend de la valeur et du signe des paramètres non linéaires  $\beta$  et  $\delta$ . Lors du phénomène de résonance, la déformation est nulle en moyenne sur une période  $\langle \varepsilon \rangle = 0$ . Dans ce cas, et en omettant les puissances supérieures à 2 (car les déformations sont faibles), le décalage de la fréquence de résonance est dans la théorie non linéaire classique

$$\frac{f - f_0}{f_0} \sim \frac{1}{2}\delta\varepsilon^2, \quad (3.13)$$

où  $f = c/2L$  est la fréquence de résonance pour des excitations acoustiques croissantes et  $f_0$  est la fréquence de résonance linéaire du mode considéré obtenue à faibles amplitudes acoustiques. L'équation (3.13) décrit le décalage de la fréquence de résonance (proportionnel à la variation du module d'Young) comme étant quadratique avec la déformation acoustique  $\varepsilon$  et proportionnel au terme non linéaire  $\delta$ . Généralement, ce comportement quadratique du décalage de fréquence de résonance en fonction de la déformation acoustique n'est pas observé dans les roches [43, 70]. L'exposant de la relation entre le décalage de fréquence de résonance  $\Delta f/f$  et la déformation  $\varepsilon$  est plus proche de 1.

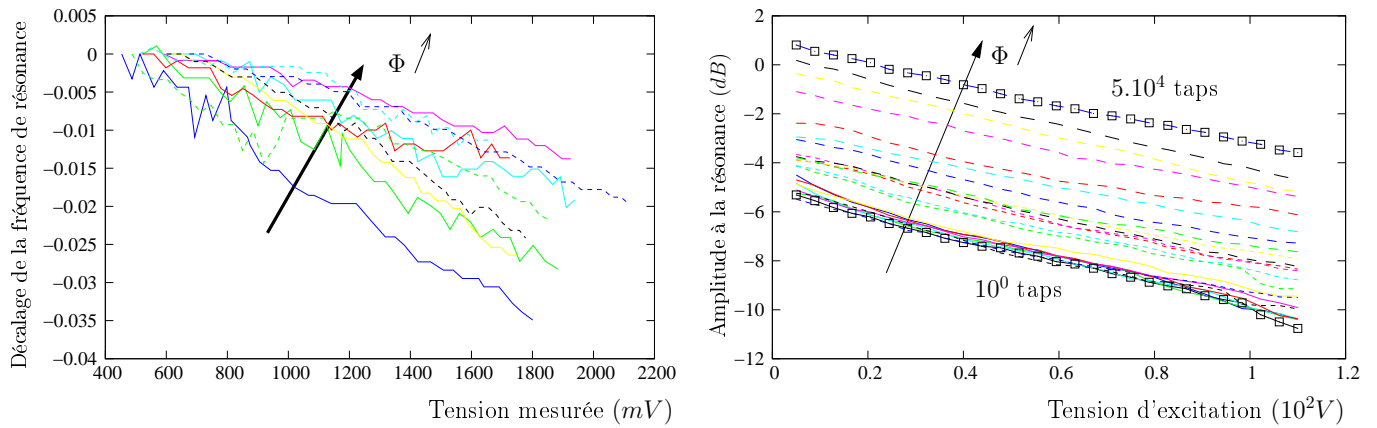


FIG. 3.13 – (a) : Décalage de la fréquence de résonance en fonction de la tension détectée au maximum du pic de résonance. Seules quelques étapes au cours du processus de compaction sont affichées pour la lisibilité de la courbe. (b) : Amplitude du maximum du pic de résonance en fonction de la tension acoustique injectée pour une expérience de compaction.

La figure 3.13(a) présente le décalage de fréquence de résonance normalisé par la fréquence de résonance linéaire en fonction de la tension détectée au maximum du pic de résonance. Seules quelques étapes du processus de compaction sont affichées pour la lisibilité de la courbe. Puisque le milieu

granulaire et ses propriétés acoustiques évoluent au cours de la compaction (comme indiqué au chapitre précédent par les fonctions de réponse en fréquence), il est nécessaire de tracer le décalage de fréquence de résonance en fonction de la tension détectée au maximum du pic de résonance  $A_{NL}$ . En effet, cette tension proportionnelle à la déformation acoustique renseigne sur l'état du milieu granulaire au cours du processus de compaction. L'évolution de la tension détectée au maximum du pic de résonance avec l'amplitude acoustique imposée est présentée sur la figure 3.13(b). Il apparaît que l'atténuation du pic de résonance (différence entre la tension détectée à faible amplitude acoustique et celle à fort niveau d'excitation) évolue très peu au cours d'une expérience de compaction.

Aux faibles amplitudes acoustiques d'excitation  $\varepsilon \leq 10^{-6}$ , la fréquence de résonance ne varie pas de manière significative avec la déformation acoustique et la fréquence de résonance linéaire  $f_0$  est identifiée. Pour une excitation plus élevée  $\varepsilon \geq 10^{-6}$ , la fréquence de résonance se décale vers les basses fréquences et le matériau présente du ramollissement. Sur la figure 3.13(a), le décalage de fréquence de résonance est représenté à partir de cette amplitude d'excitation seuil. La dynamique d'évolution est clairement linéaire en fonction de la tension détectée, soit  $\Delta f/f \sim \alpha_f V_{mes}$ , où  $V_{mes}$  est la tension détectée au maximum du pic de résonance et  $\alpha_f$  est un paramètre caractérisant la non-linéarité étudiée plus tard. Au cours du processus de compaction, le décalage de fréquence de résonance est moins prononcé, comme observé sur la figure 3.11. A  $t = 0$  taps, la fréquence de résonance linéaire  $f_0$  vaut  $\simeq 1210$  Hz et le décalage de fréquence entre les extrema d'amplitudes acoustiques est de  $\Delta f \simeq 50$  Hz, soit un écart de 4% par rapport à la valeur linéaire. A la fin d'une séquence de compaction de  $5.10^4$  taps, le décalage ne vaut plus que  $\Delta f \simeq 25$  Hz, soit 1.5% de décalage par rapport à  $f_{0final} \simeq 1550$  Hz. Le paramètre de non-linéarité  $\alpha_f$  diminue alors au cours du processus de compaction. Chaque expérience de compaction réalisée montre une reproductibilité sur le comportement global de cette dynamique de décalage de résonance. En moyennant sur cinq réalisations de compaction du milieu granulaire à amplitude de sollicitation fixée, l'évolution du paramètre non linéaire  $\alpha_f$  avec le nombre de secousses est bien modélisée par une décroissance exponentielle (voir la figure 3.14). Un ajustement de la forme  $Ae^{-an_{tap}} + B$  fournit les paramètres  $A = 0.04$ ,  $B = 0.01$  et  $a = 14.10^{-5}$ .

La dépendance linéaire du décalage de fréquence de résonance fonction de la tension mesurée est le signe d'une non-linéarité où le phénomène d'hystérésis non linéaire doit être ajouté à la relation contrainte/déformation. L'équation d'état associée à ce phénomène doit prendre en compte la dépendance de la réponse du milieu au signe de la variation de la déformation  $\partial\varepsilon/\partial t$ . Dans ce cas, une relation contrainte/déformation hystérétique peut être décrite par :

$$\sigma = E_0\varepsilon(1 + \beta\varepsilon + \delta\varepsilon^2 + \dots) + \alpha F(\varepsilon, \text{sign}(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t})), \quad (3.14)$$

où le coefficient  $\alpha$  quantifie l'importance de l'hystérésis dans la relation contrainte/déformation, et  $F$  est une fonction décrivant cet hystérésis. Dans le cas d'une déformation monofréquentielle dans une barre résonante granulaire [33], l'approximation quadratique hystérétique implique un décalage de la fréquence de résonance proportionnel à la déformation acoustique

$$\frac{\Delta f}{f_0} \sim \alpha_f \varepsilon, \quad (3.15)$$



où  $\alpha_f$  est le paramètre de non-linéarité quadratique hystérétique. La dépendance linéaire du décalage de fréquence de résonance avec la déformation acoustique obtenue dans notre expérience confirme le caractère quadratique hystérétique de la non-linéarité du milieu. Un autre indicateur d'hystérésis dans la relation d'état du milieu, discutée ci-dessous, est la mesure de l'atténuation en fonction de l'amplitude acoustique, caractérisée par le paramètre non linéaire  $\alpha_Q$ .

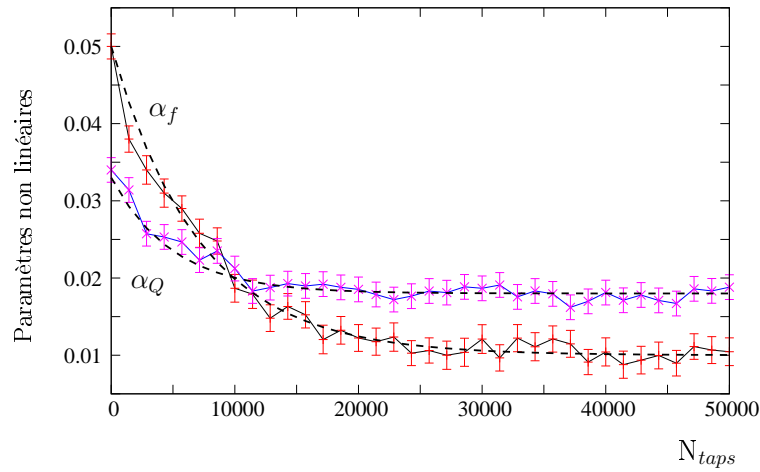


FIG. 3.14 – Paramètres non linéaires hystérétiques élastique  $\alpha_f$  et dissipatif  $\alpha_Q$  en fonction du nombre de sollicitations. La décroissance exponentielle est affichée en pointillés.

### 3.4.5 Dissipation linéaire et non linéaire

Pour les faibles amplitudes acoustiques d'excitation  $\varepsilon \leq 10^{-6}$ , le milieu est considéré linéaire. Il en résulte que la fréquence de résonance ne varie pas de manière significative avec l'amplitude acoustique imposée. De la même manière, aucun changement n'est observé sur les mesures de l'amplitude du pic à la résonance et de la largeur relative du pic de résonance. Pour un système élastique linéaire, le facteur de qualité linéaire  $Q_0$ ,

$$Q_0 = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta W}{W}, \quad (3.16)$$

relie la quantité d'énergie élastique stockée dans le système  $W$  sur l'énergie dissipée en une période de l'onde acoustique  $\Delta W$ . Dans ce cas le facteur de qualité linéaire  $Q_0$  est proportionnel à l'amplitude à la résonance pour une force donnée. Un ajustement de la courbe de résonance avec une courbe Lorentzienne permet d'extraire ce terme de dissipation lorsque le milieu est linéaire. La figure 3.15(a) présente le facteur de qualité linéaire  $Q_0$  extrait à basse amplitude acoustique d'excitation, et son évolution au cours de la compaction. Les valeurs obtenues de  $Q_0$  sont faibles,  $Q_0 = 20 \pm 3$ , et sont intuitivement dues à la faible contrainte de confinement du milieu granulaire. Les aires de contacts entre billes sont alors faibles et induisent une forte dissipation de l'énergie acoustique au cours de

sa propagation (par des phénomènes thermoélastiques par exemple [90]). De plus, le nombre de contacts pouvant présenter du glissement est important dans un milieu granulaire non consolidé, et les phénomènes de friction au niveau des contacts peuvent aussi être à l'origine de la dissipation. Le comportement fortement bruité du facteur de qualité linéaire  $Q_0$  autour de l'ajustement logarithmique (figure 3.15(a)) fait apparaître une forte sensibilité du facteur de qualité linéaire à la structure du milieu. Enfin, au cours du processus de compaction, le facteur de qualité  $Q_0$  croît faiblement. Ce phénomène est à corrélérer avec l'augmentation de l'amplitude du maximum du pic de résonance (voir la figure 3.13(b)). Cependant, alors que l'augmentation de l'amplitude  $A_0$  du pic à la résonance concorde qualitativement avec la diminution de la dissipation (inverse au facteur de qualité), le caractère non monotone du facteur de qualité  $Q_0$  n'est pas retrouvé sur l'évolution de  $A_0$  (croissance monotone avec la compaction).

Lorsque le milieu est non linéaire, l'ajustement Lorentzien ne peut pas être utilisé. Les courbes de résonances non linéaires sont moins marquées (augmentation de la largeur du pic) et moins symétriques, ce qui empêche aussi l'utilisation de la méthode à  $-3$  dB. Une approche expérimentale [42], adaptée aux milieux fortement non linéaire et dissipatifs tels les milieux granulaires, détermine l'atténuation dépendante de l'amplitude acoustique par la mesure de l'amplitude de déformation détectée au sein du milieu. L'atténuation non linéaire

$$\Delta(1/Q(\varepsilon)) = \pi \left( \frac{1}{Q(\varepsilon)} - \frac{1}{Q_o} \right), \quad (3.17)$$

est estimée par

$$\Delta(1/Q(\varepsilon)) = \frac{1}{Q_0} \left( \frac{V\varepsilon_0}{V_0\varepsilon} - 1 \right), \quad (3.18)$$

avec  $\varepsilon$  l'amplitude de déformation détectée pour la tension  $V$ ,  $Q_0$  le facteur de qualité linéaire obtenu pour l'amplitude de déformation  $\varepsilon_0$  à la tension  $V_0$ . La figure 3.15(b) présente l'atténuation non linéaire estimée par l'équation (3.18) en fonction de la tension mesurée  $V$  au maximum du pic de résonance. Les observations expérimentales montrent que la variation d'atténuation  $\Delta(1/Q(\varepsilon))$  a une dépendance linéaire avec la tension détectée. De manière identique au paramètre non linéaire élastique introduit par l'équation (3.15), un paramètre de non-linéarité dissipative  $\alpha_Q$  est introduit

$$\Delta(1/Q(\varepsilon)) = \pi \left( \frac{1}{Q(\varepsilon)} - \frac{1}{Q_o} \right) \sim \alpha_Q \varepsilon, \quad (3.19)$$

reliant la déformation acoustique détectée  $\varepsilon$  aux pertes énergétiques non linéaires  $\Delta(1/Q(\varepsilon))$ . Au cours du processus de compaction, l'atténuation non linéaire diminue, ce qui rejoint l'observation des courbes de résonance sur la figure 3.11. Pour l'état final de compaction (voir la figure 3.11(b)), la variation de la largeur du pic est inférieure à celle des courbes de résonance pour l'état initial (voir la figure 3.11(a)). Le paramètre d'atténuation non linéaire décroît au cours du processus de compaction, tout comme le paramètre non linéaire élastique hystérétique  $\alpha_f$ . Son évolution, présentée sur la figure 3.14, est bien ajustée par une décroissance exponentielle  $Ae^{-an_{tap}} + B$  avec les paramètres  $A = 0.015$ ,  $B = 0.018$  et  $a = 2.10^{-4}$ .

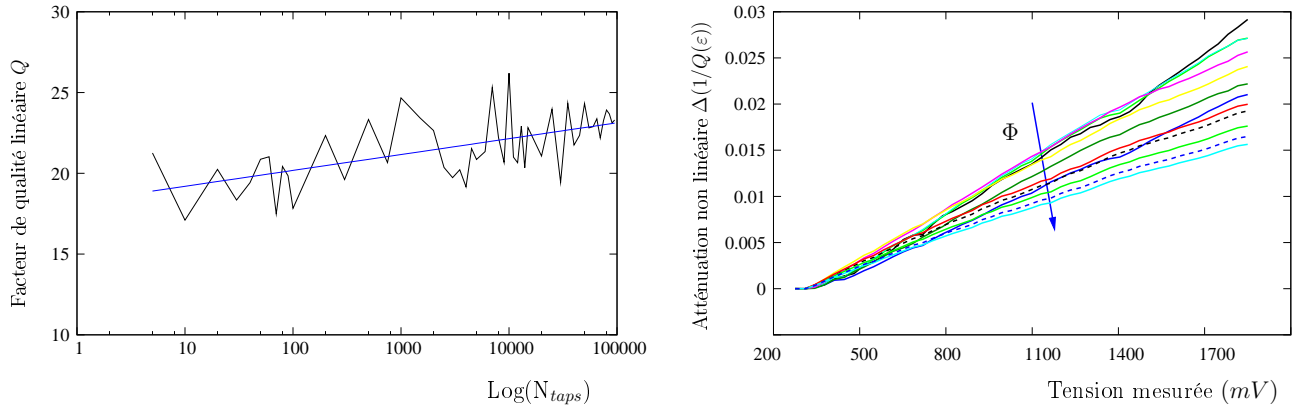


FIG. 3.15 – (a) Evolution du facteur de qualité linéaire  $Q_0$  au cours de la compaction. (b) Paramètre d'atténuation non linéaire  $\Delta(1/Q(\epsilon))$  en fonction de la tension mesurée au maximum du pic de résonance. L'atténuation non linéaire diminue au cours de la compaction

Pour un solide élastique homogène, il suffit de soustraire aux effets non linéaires d'atténuation la composante indépendante en amplitude acoustique pour s'affranchir de la présence de pertes énergétiques linéaires (provenant des pertes thermoélastiques ou visqueuses). Ceci est plus compliqué pour les géomatériaux. Dans les roches et milieux granulaires, les propriétés hystérétiques du milieu proviennent des effets de friction ou d'adhésion localisés aux défauts fortement compressibles, comme les fractures ou les contacts inter-grain. Ces défauts, de faibles raideurs, peuvent participer grandement aux pertes causées à la fois par les mécanismes linéaires de dissipation et par les effets hystérétiques. Ces pertes peuvent être thermoélastiques et dues à la géométrie des défauts (fortes déformations locales, diffusion thermique frustrée). Les pertes linéaires dans leur origine physique peuvent alors devenir dépendantes de la déformation acoustique dans les milieux micro-inhomogènes. Il est possible de montrer que dans ces milieux, la combinaison des effets non linéaires élastiques et des pertes linéaires localisées aux défauts peut expliquer la dissipation non linéaire (dépendante de l'amplitude) [92]. Nous discutons dans la section suivante de la possibilité de s'affranchir des effets linéaires de la relation contrainte/déformation sur l'évaluation des non-linéarités du milieu.

### 3.4.6 Paramètre de Read

Le paramètre de Read [77] a été introduit pour caractériser la forme de la boucle d'hystérésis dans la relation contrainte/déformation. En effet, la non-linéarité de la relation contrainte/déformation peut être approximée par une déformation en loi de puissance de la contrainte, cette loi de puissance étant différente selon le sens de variation de la contrainte. La puissance peut alors être estimée expérimentalement par les dépendances en amplitude du décrément et de la non-linéarité élastique. Les données expérimentales recueillies sur le paramètre de non-linéarité élastique hystérétique  $\alpha_f$  et le paramètre d'atténuation non linéaire  $\alpha_Q$  donnent ainsi des informations complémentaires sur la boucle d'hystérésis. L'évolution du paramètre de Read au cours du processus de compaction apparaît comme une

source additionnelle de la compréhension de la physique de ce processus.

Afin de caractériser les variations relatives de l'atténuation non linéaire par rapport à l'élasticité non linéaire du milieu avec l'amplitude acoustique, le paramètre de Read [77]

$$r = \frac{2D}{\Delta E/E_0}, \quad (3.20)$$

est introduit comme le rapport du décrement logarithmique  $D$  sur  $\Delta E/E_0 = (E - E_0)/E_0$ , la variation relative du module élastique avec l'amplitude acoustique. Le décrement logarithmique est inversement proportionnel au facteur de qualité du milieu  $D = \pi/Q$ , et l'atténuation non linéaire sera calculée à partir de l'équation (3.17). La variation relative du module d'Young vaut

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\Delta \rho}{\rho_0} + 2\frac{\Delta c}{c_0}. \quad (3.21)$$

En négligeant l'effet de compaction induit acoustiquement, soit  $\Delta \rho/\rho_0 = (\rho - \rho_0)/\rho_0 \simeq 0$ , et la longueur de résonance du système étant constante, soit  $\Delta f = (f - f_0)/f_0 \simeq \Delta c/L_{\text{résonance}}$ , la variation relative du module élastique est obtenue

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 2\frac{\Delta f}{f_0}. \quad (3.22)$$

Le paramètre de Read classiquement utilisé dans la littérature vaut ainsi

$$r = \pi \frac{\frac{1}{Q(\varepsilon)} - \frac{1}{Q_0}}{\frac{\Delta f(\varepsilon)}{f_0}}, \quad (3.23)$$

et son évolution au cours de la compaction du milieu granulaire est présentée sur la figure 3.16. Malgré le caractère bruité du paramètre estimé, l'évolution semble passer d'un plateau où  $r$  vaut environ 0.5 jusque  $10^2$  taps puis augmente jusque  $10^3$  taps au triple de sa valeur initiale avant de saturer avec la compaction pour des nombres de taps élevés.

Différentes valeurs du paramètre de Read sont reportées dans la littérature [51] pour différents modèles d'hystérésis. Dans le modèle d'amortissement de Granato et Lücke pour des dislocations dans des cristaux [28], l'équation d'état  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$  du milieu est caractérisée par une fonction hystérétique dont l'aire détermine les pertes non linéaires, et la dérivée la variation de module élastique. La boucle d'hystérésis pour ce modèle de dislocations est illustré sur la figure 3.17(a). La boucle hystérétique est symétrique par rapport à l'origine de la relation contrainte/déformation. L'énergie vibratoire est perdue dans un mouvement hystérétique réversible durant une demi-période de l'onde acoustique. Dans le modèle de friction de Davidenkov [51], illustré sur la figure 3.17(b), la boucle hystérétique ne passe pas par l'origine et présente une symétrie biaxiale. La non-linéarité de la relation contrainte/déformation est alors décrite par une déformation en loi de puissance de la contrainte dépendant du sens de variation de cette dernière. Pour les deux modèles de dislocations cités, le paramètre de Read obtenu, proche de l'unité, n'exhibe pas de valeurs très différentes [51]. Il en résulte que la précision du paramètre de

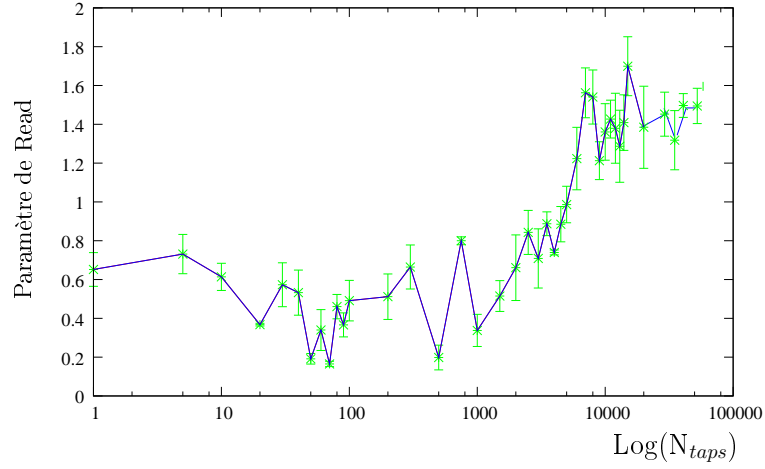


FIG. 3.16 – Evolution au cours de la compaction du paramètre de Read classique calculé à partir de l'équation (3.16).

Read est d'une grande importance pour la caractérisation de la boucle hystérétique. Cependant, il faut d'abord s'assurer que le comportement observé (figure 3.16) est bien dû aux phénomènes non linéaires, et non à d'autres mécanismes, par exemple linéaires.

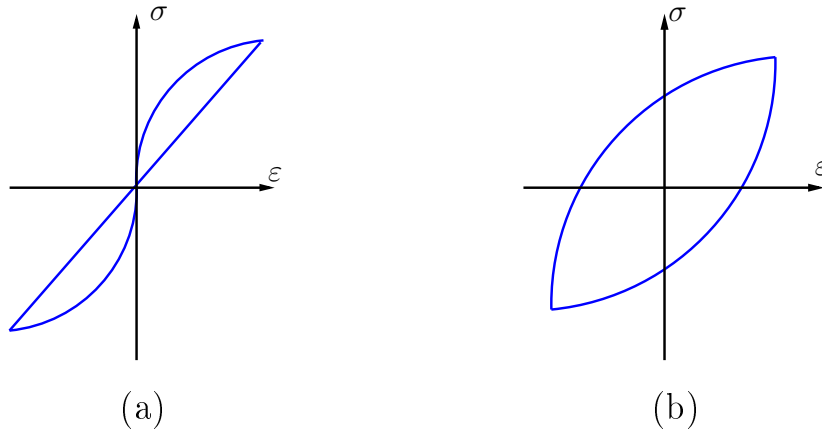


FIG. 3.17 – Illustration des modèles de boucles hystérétiques de Granato-Lücke (a) et de Davidenkov avec friction (b).

Alors que l'ensemble des paramètres non linéaires observés jusqu'ici diminuent avec la compaction, le rôle relatif de l'atténuation non linéaire par rapport à l'élasticité non linéaire augmente durant ce processus. Cependant, l'évolution du paramètre de Read avec la compaction peut être causée autant par l'évolution des propriétés linéaires du milieu que par l'évolution de ses propriétés non linéaires. De ce fait

le paramètre contenant l'information uniquement sur les parties non linéaires de cette relation d'état du milieu n'est pas le paramètre de Read classiquement utilisé. Celui-ci dépend à la fois de la variation avec l'amplitude acoustique du décrement logarithmique et du décalage de fréquence de résonance normalisé, ce qui ne signifie pas qu'il dépende uniquement des non-linéarités du milieu. Par conséquent, il convient de supprimer l'information sur les propriétés linéaires de la relation contrainte/déformation pour le calcul du paramètre de Read, ces propriétés linéaires variant avec la compaction du milieu.

Pour cela, considérons une déformation acoustique  $\varepsilon_{ac} = \varepsilon_A \cos(\omega t) = \varepsilon_A \cos(\theta)$  sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $\varepsilon_A$ . Cette déformation acoustique est à l'origine d'une contrainte  $\sigma$

$$\sigma = \sigma_A \cos(\theta + \phi) = \sigma_A \cos(\phi) \cos(\theta) - \sigma_A \sin(\phi) \sin(\theta). \quad (3.24)$$

déphasée avec l'excitation. Cette contrainte se décompose en une partie d'amplitude  $\sigma' = \sigma_A \cos \phi$  en phase avec la déformation imposée et une partie d'amplitude  $\sigma'' = \sigma_A \sin \phi$  en quadrature de phase qui traduit la dissipation de l'onde au cours de sa propagation. Dans l'approximation d'un déphasage petit  $|\phi| \ll 1$ , soit  $\phi \sim \tan(\phi)$ , le décrement logarithmique

$$D = \pi \phi \simeq \pi \tan(\phi) = -\pi \frac{\sigma''}{\sigma'}, \quad (3.25)$$

permet d'exprimer l'inverse du facteur de qualité

$$\frac{1}{Q} = -\frac{\sigma''}{\sigma'}, \quad (3.26)$$

où  $-\sigma'' \geq 0$  est l'amplitude de l'énergie dissipée en une période de l'onde acoustique.

L'expression du module d'Young est généralement obtenue par le rapport entre la contrainte induite dans le matériau et la déformation élastique associée. Une expression exacte de ce module [51] doit cependant uniquement tenir compte de la composante en phase de la contrainte avec l'excitation

$$E = \frac{\sigma'}{\varepsilon_A}. \quad (3.27)$$

Afin d'ôter l'information linéaire inhérente au calcul du paramètre de Read, il est nécessaire de décomposer la contrainte  $\sigma$  en une partie linéaire et une partie non linéaire dépendante de l'amplitude acoustique émise pour les deux composantes en phase et hors phase

$$\sigma' = \sigma'_0 + \sigma'_{nl} \quad (3.28)$$

$$\sigma'' = \sigma''_0 + \sigma''_{nl}, \quad (3.29)$$

où l'indice 0 dénote la composante linéaire de la contrainte et l'indice  $nl$  indique la dépendance en amplitude du paramètre considéré. En supposant les composantes non linéaires faibles devant la composante linéaire, soit  $|\sigma'_{nl}| \ll \sigma'_0$  et  $|\sigma''_{nl}| \ll \sigma''_0$ , le calcul du facteur de perte donne

$$\frac{1}{Q(\varepsilon)} - \frac{1}{Q_0} = \frac{\sigma''_0 \sigma'_{nl}}{(\sigma'_0)^2} - \frac{\sigma''_{nl}}{\sigma'_0}. \quad (3.30)$$

En suivant le même raisonnement pour l'évaluation du décalage de fréquence de résonance issu de l'équation (3.21) et en reportant (3.28) et (3.30) dans l'équation (3.27), l'expression suivante est obtenue

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{2} \frac{\sigma'_{nl}}{\sigma'_o}. \quad (3.31)$$

Le paramètre de Read devient alors

$$r = \frac{D}{\Delta f/f} = 2\pi \left( \frac{\sigma''_o}{\sigma'_o} - \frac{\sigma''_{nl}}{\sigma'_{nl}} \right). \quad (3.32)$$

En identifiant  $\sigma''_o/\sigma'_o$  à  $-1/Q_o$ , le rapport de la dissipation non linéaire sur l'élasticité non linéaire s'écrit

$$\frac{-\sigma''_{nl}}{\sigma'_{nl}} = \frac{1}{Q_o} + \frac{r}{2\pi}, \quad (3.33)$$

qui est une fonction dépendant uniquement des non-linéarités de la relation contrainte/déformation, puisque  $-\sigma''_{nl}$  représente l'amplitude de l'énergie dissipée non linéairement en une période et  $\sigma'_{nl}$  l'amplitude élastique non linéaire de la composante en phase avec la déformation imposée. En plus de la normalisation du paramètre de Read classique par un facteur  $2\pi$ , il faut ajouter le terme  $1/Q_o$  représentant la partie linéaire de l'atténuation dans le milieu. Le paramètre non linéaire associé à l'équation (3.33), appelé paramètre de Read non linéaire, est présenté sur la figure 3.18. Le comportement du paramètre de Read non linéaire est identique à celui calculé par les méthodes classiques (voir la figure 3.16) puisque le facteur de qualité linéaire  $Q_o$  évolue peu durant une expérience de compaction. D'une valeur moyenne de  $22 \pm 2$  sur une expérience de compaction, le terme  $1/Q_o$  est quasi constant avec le nombre de taps et est d'un ordre de grandeur inférieur au paramètre  $r/2\pi$ .

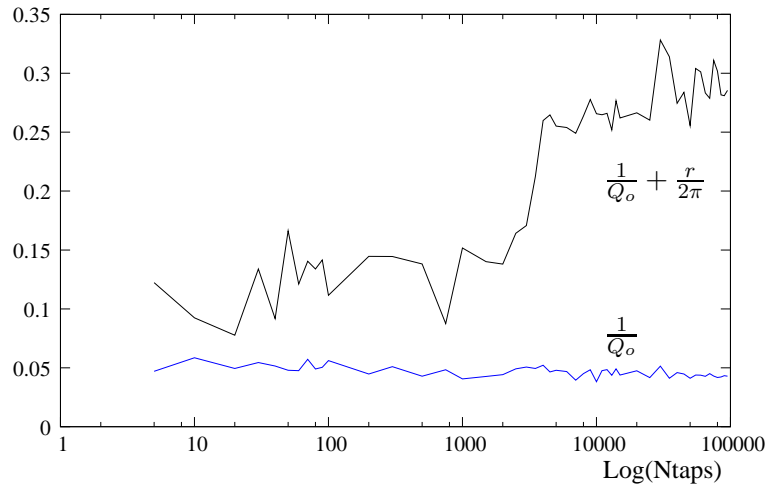


FIG. 3.18 – Evolution du paramètre de Read non linéaire calculé à partir de l'équation (3.33) et de l'atténuation linéaire  $1/Q_o$  avec le logarithme du nombre de secousses.

### 3.5 Interprétations et discussion

Les observations expérimentales indiquent que le processus de compaction est accompagné d'une augmentation de la rigidité du milieu. Cet accroissement peut être attribué à l'augmentation du chargement moyen des contacts (due à la diminution de volume du milieu) et de leur nombre (nombre de coordination par billes). Une diminution des paramètres acoustiques non linéaires quadratiques du milieu en cours de compaction a aussi été présentée. En première approche, selon la théorie de Hertz, les paramètres non linéaires classiques sont inversement proportionnels à la déformation statique moyenne des contacts  $\varepsilon_0$ . La diminution des non-linéarités du milieu, résultant de l'augmentation de la déformation statique moyenne des contacts, peut provenir de la densification du milieu. Avec l'étude du phénomène de clappement, une méthode numérique a quantitativement permis de montrer le rôle potentiel de la diminution du nombre de contacts faibles sur les effets acoustiques observés. Les contacts faibles jouent un rôle prépondérant dans les propriétés élastiques non linéaires des milieux granulaires. Il a été observé de plus que l'élasticité non linéaire et l'atténuation non linéaire diminuent au cours de la compaction. L'influence des propriétés linéaires dans l'évaluation de ces paramètres a été étudiée avec le calcul du paramètre de Read non linéaire. L'évolution du paramètre de Read non linéaire indique que le rôle de la dissipation non linéaire augmente relativement à l'élasticité non linéaire dans une expérience de compaction. Cette observation est reliée à la modification de la distribution de déformations des contacts.

Puisque les méthodes non linéaires sont préférentiellement sensibles aux contacts faibles, l'étude du rôle de ces contacts sur les paramètres non linéaires est nécessaire. En particulier, les contacts faibles peuvent présenter des mouvements de stick/slip, ou alors glisser totalement. Cependant la proportion entre les contacts faibles présentant du glissement et ceux avec adhésion n'est pas accessible expérimentalement. Cette modification de la distribution de contacts aux faibles déformations statiques peut avoir une influence importante sur les non-linéarités acoustiques. Par exemple, il semble intuitif qu'un contact avec glissement total participe plus à la dissipation non linéaire qu'à l'élasticité non linéaire, comparativement à un contact avec adhésion (au vu de la relation contrainte/déformation de chaque phénomène considéré). Le paramètre de Read non linéaire estimé, et son évolution au cours de la compaction, peut alors donner des informations importantes sur la physique des contacts et sur leur évolution. Les rôles de la dissipation non linéaire et de l'élasticité non linéaire pour des contacts exhibant des mouvements de stick/slip ou uniquement du glissement doivent alors être discutés.

Tout d'abord la sensibilité des méthodes acoustiques linéaires et non linéaires au cours du processus de compaction est discutée. Ensuite, un modèle qualitatif discutant du rôle des contacts exhibant des mouvements de stick/slip ou du glissement total sur les non-linéarités acoustiques est proposé pour décrire les observations expérimentales.

#### 3.5.1 Sensibilité des méthodes non linéaires

Les différentes expériences d'acoustique non linéaires réalisées ont permis de mettre en évidence une différence de sensibilité entre les méthodes d'acoustique linéaire et non linéaire. Le suivi de paramètres



linéaires (fonction de réponse en fréquence, vitesse des ondes longitudinales, fréquence de résonance du milieu) a montré une saturation de l'évolution de ces paramètres au cours de la compaction. Après  $10^3$  taps, ces paramètres atteignent un plateau tout comme la variation de compacité du milieu (qui est aussi un paramètre macroscopique du milieu).

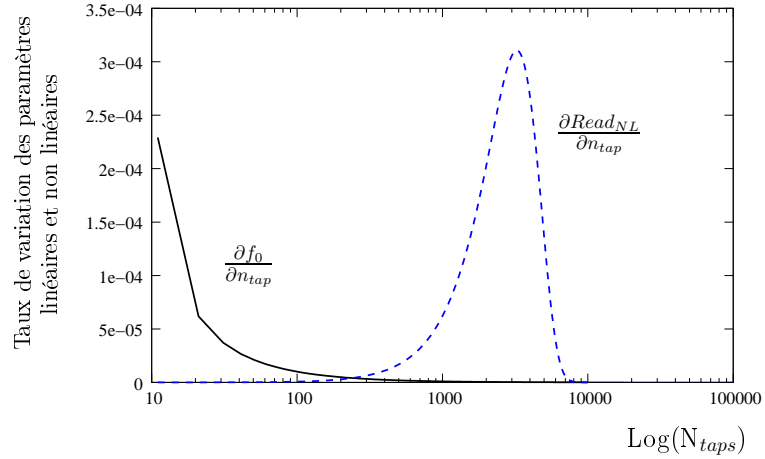


FIG. 3.19 – Sensibilité des méthodes d'acoustique linéaire et non linéaire représentée par le taux de variation des paramètres acoustiques mesurés.

L'évolution du paramètre de Read non linéaire décrit par l'équation (3.33) montre un taux d'accroissement élevé dans une gamme de nombre de taps comprise entre  $10^3$  et  $10^4$  taps avant de saturer. Pour identifier la sensibilité des méthodes d'acoustique linéaire et non linéaire au cours du processus de compaction, le taux de variation de paramètres linéaires (fréquence de résonance linéaire) et non linéaires (paramètre de Read non linéaire) est présenté sur la figure 3.19.

Les paramètres acoustiques linéaires varient dans la même proportion que la compacité du milieu, et sont sensibles aux faibles nombres de taps  $n_{tap} < 10^3$ . Ils sont donc bien adaptés pour quantifier l'évolution macroscopique du milieu (diminution du volume, augmentation du module élastique linéaire). Le paramètre de Read non linéaire présente des variations importantes dans une gamme de sollicitations  $10^3 < n_{tap} < 10^4$  plus élevée que pour les paramètres linéaires. En effet, dans ce domaine, les paramètres linéaires sont saturés. Lorsque les réarrangements entre grains diminuent à cause de la frustration géométrique, les phénomènes ayant lieu dans le milieu granulaire sont des réarrangements au niveau microscopique (microglissements par exemple). A priori, dans cette gamme de sollicitations, les mécanismes d'interaction non linéaire peuvent être très sensibles à ces micro-réarrangements. Il est maintenant proposé un modèle quantitatif permettant d'analyser les variations du paramètre de Read non linéaire, et ses implications sur la physique des contacts au cours de la compaction granulaire.

### 3.5.2 Modèle qualitatif proposé

La contribution des éléments micromécaniques du milieu granulaire sur les non-linéarités élastiques et dissipatives est discutée. A priori, le paramètre de Read est plus élevé pour un contact exhibant du glissement seul ("sliding") qu'un contact avec mouvement de stick/slip. Pour rappel, les relations contrainte/déformation pour des contacts présentant un mouvement de stick/slip ou glissement sont présentées sur la figure 3.20.

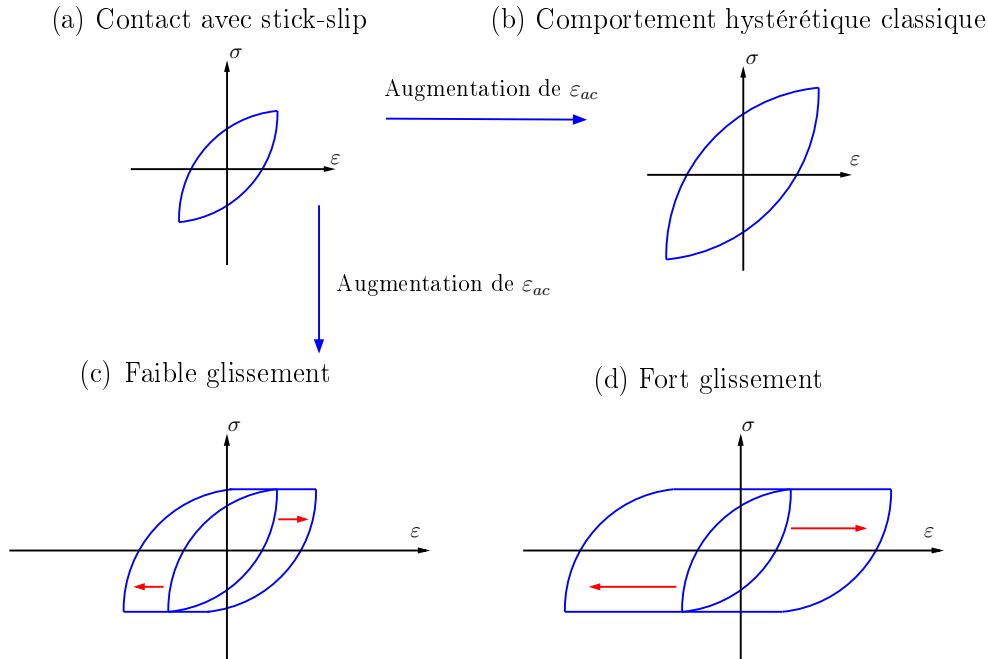


FIG. 3.20 – Relations contrainte/déformation d'un contact présentant une non-linéarité de type Hertz-Mindlin (a), un comportement hystérétique classique (b), un glissement faible (c) et un fort glissement (d).

Généralement, la quantification des effets non linéaires élastiques et dissipatifs est effectuée par respectivement la pente de la relation contrainte/déformation (non-linéarité élastique) et l'aire de cette courbe (non-linéarité dissipative). Ainsi il est attendu qu'un élément fortement glissant participe plus à la dissipation non linéaire (car l'aire de la relation contrainte/déformation augmente) qu'à l'élasticité non linéaire (lors du glissement la contrainte  $\sigma$  est constante en fonction de la déformation  $\varepsilon$ ). Un modèle simple fournissant une analyse sur la contribution des non-linéarités élastiques et dissipatives des contacts glissants au sein du milieu granulaire est proposé.

Pour cela un réseau granulaire cubique simple de sphères est considéré. L'étude porte sur la propagation d'ondes transverses le long des chaînes de billes (horizontales ou verticales), supposant une distribution statistique du chargement normal entre sphères. La caractérisation de l'évolution des non-linéarités du système est étudiée par l'intermédiaire du paramètre de Read. Il a déjà été décrit auparavant la manière dont l'influence des propriétés linéaires de la relation contrainte/déformation

pouvait être éliminée du calcul de ce paramètre. Pour rappel, le paramètre de Read a été introduit en écrivant la réponse du milieu à une déformation acoustique sinusoïdale  $\varepsilon = \varepsilon_A \cos(\theta)$  par une contrainte à la même pulsation  $\omega$  déphasée

$$\sigma = \sigma \cos(\theta + \phi) = \sigma_A \cos(\phi) \cos(\theta) - \sigma_A \sin(\phi) \sin(\theta), \quad (3.34)$$

se décomposant en une partie d'amplitude  $\sigma' = \sigma_A \cos \phi$  en phase avec la déformation imposée et une partie d'amplitude  $\sigma'' = \sigma_A \sin \phi$  en opposition de phase qui traduit l'atténuation de l'onde au cours de sa propagation. Ces composantes en phase et en opposition de phase se déduisent de la projection de la contrainte  $\sigma$  sur les fonctions trigonométriques

$$\sigma' = \frac{1}{\pi} \oint \sigma \cos(\theta) d\theta, \quad (3.35)$$

$$\sigma'' = \frac{1}{\pi} \oint \sigma \sin(\theta) d\theta. \quad (3.36)$$

Pour une onde propagative avec des pertes supposées faibles  $|\sigma''| \ll |\sigma'|$ , le décrément  $D$  est défini par

$$D = \pi \phi \simeq \pi \tan(\phi) = -\pi \frac{\sigma''}{\sigma'}, \quad (3.37)$$

en supposant le déphasage de l'onde faible  $|\phi| \ll 1$ . En injectant les décompositions en phase et en opposition de phase de la contrainte issues de (3.35) et (3.37), le décrément devient

$$D = -\pi \frac{\oint \sigma \sin(\theta) d\theta}{\oint \sigma \cos(\theta) d\theta} = \frac{\pi}{\varepsilon_A} \frac{\oint \sigma d\varepsilon}{\oint \sigma \cos(\theta) d\theta}. \quad (3.38)$$

La contrainte  $\sigma$  pour un seul contact dépend à la fois de la déformation de cisaillement  $\varepsilon$  et du chargement normal  $F_N$  appliqué sur ce contact, soit  $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon, F_N)$ , où l'indice  $i$  dénote le contact  $i$  dans le réseau cubique. Dans le cas général d'un matériau granulaire chargé de manière inhomogène, une distribution de chargement statique des contacts  $n(F_N)$  doit être prise en compte. La contrainte devient alors

$$\sigma = \int_0^\infty n(F_N) \sigma_i(\varepsilon, F_N) dF_N. \quad (3.39)$$

L'expression du décrément (3.38), pour un réseau granulaire cubique simple chargé selon une distribution de force statique  $n(F_N)$ , s'écrit

$$D = \frac{\pi}{\varepsilon_A} \frac{\int_0^\infty n(F_N) dF_N \oint \sigma_i(\varepsilon, F_N) d\varepsilon}{\int_0^\infty n(F_N) dF_N \oint \sigma_i(\varepsilon, F_N) \cos(\theta) d\theta}. \quad (3.40)$$

De la même manière que pour l'équation (3.27), le module d'Young du milieu est défini par la composante en phase de la contrainte sur la déformation acoustique

$$E = \frac{\sigma'}{\varepsilon_A} = \frac{\frac{1}{\pi} \oint \sigma \cos(\theta) d\theta}{\varepsilon_A}, \quad (3.41)$$

et peut être séparé en une contribution linéaire et une composante non linéaire en écrivant la contrainte  $\sigma = \sigma_{LN} + \sigma_{NL}$  :

$$E = \frac{\frac{1}{\pi} \oint \sigma_{LN} \cos(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \oint \sigma_{NL} \cos(\theta) d\theta}{\varepsilon_A}, \quad (3.42)$$

où l'intégrale contenant  $\sigma_{NL}$  représente la contribution uniquement non linéaire au module d'Young  $\Delta E_{NL} = E - E_0$ . Pour exprimer un paramètre de Read dépendant uniquement des contributions non linéaires de la dissipation et de la variation du module d'Young, la variation du module non linéaire du milieu est obtenue

$$\frac{\Delta E_{NL}}{E} = \frac{\oint \sigma_{NL} \cos(\theta) d\theta}{\oint \sigma \cos(\theta) d\theta}. \quad (3.43)$$

Dans le cas d'une distribution statistique de chargement statique entre sphères, l'équation (3.43) s'écrit

$$\frac{\Delta E_{NL}}{E} = \frac{\int_0^\infty n(F_N) dF_N \oint \sigma_{iNL} \cos(\theta) d\theta}{\int_0^\infty n(F_N) dF_N \oint \sigma_i \cos(\theta) d\theta}. \quad (3.44)$$

De cette évaluation de la variation du module élastique non linéaire, il apparaît que le dénominateur de l'équation (3.40) est équivalent à un terme élastique (module d'Young) et ne prend pas en compte la dissipation. Il est alors raisonnable d'opérer la même décomposition en contributions linéaire et non linéaire pour le décrément  $D$  pour obtenir la partie uniquement non linéaire du terme dissipatif

$$D_{NL} = \frac{\pi}{\varepsilon_A} \frac{\int_0^\infty n(F_N) dF_N \oint \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) d\varepsilon}{\int_0^\infty n(F_N) dF_N \oint \sigma(\varepsilon, F_N) \cos(\theta) d\theta}. \quad (3.45)$$

Le paramètre de Read, défini comme le rapport relatif de la dissipation non linéaire sur l'élasticité non linéaire, est alors obtenu en ne considérant que les contributions non linéaires de la relation contrainte/déformation  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , et vaut

$$r = \frac{D_{NL}}{(\Delta E_{NL}/E)} = \frac{\pi}{\varepsilon_A} \frac{\int_0^\infty n(F_N) dF_N \oint \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) d\varepsilon}{\int_0^\infty n(F_N) dF_N \oint \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) \cos(\theta) d\theta}. \quad (3.46)$$

Il apparaît clairement que les contributions linéaires à la dissipation et à l'élasticité, présentes respectivement aux dénominateurs des équations (3.44) et (3.45), sont éliminées. Par exemple, au cours de la compaction du milieu granulaire, l'évolution du module d'Young linéaire (observé par le décalage de la fréquence de résonance linéaire vers les hautes fréquences en figure (3.12)) et de l'absorption linéaire (augmentation du facteur de qualité linéaire  $Q_0$  observée sur la figure (3.15)), ne contribue pas aux variations du paramètre de Read uniquement non linéaire défini par l'équation (3.46).

Ce modèle a permis d'obtenir un paramètre purement non linéaire, le paramètre de Read non linéaire, dépendant de l'amplitude de l'excitation acoustique  $\varepsilon_A$  et des non-linéarités de la relation contrainte/déformation pour un réseau granulaire cubique simple chargé par une distribution statistique de forces. Il est possible dès maintenant d'estimer, suivant le type de relations contrainte/déformation représentant les éléments micromécaniques du milieu granulaire, quelles sont les contributions de ces éléments aux non-linéarités élastiques et dissipatives. L'approche la plus simple pour débiter est de considérer un contact individuel chargé par une force normale  $F_N$  pouvant présenter du glissement ou non suivant l'amplitude de la déformation acoustique appliquée. Le modèle de deux sphères en contact par la théorie de Hertz a déjà été présenté dans le premier chapitre de ce document. En négligeant

le micro-glissement sur les bords du contact (le 'slip'), la force tangentielle  $Q_T$  au niveau de l'aire de contact s'écrit :

$$Q_T = K(F_N)U^t, \quad (3.47)$$

où  $K(F_N)$  est la raideur transverse du contact et  $U^t$  le déplacement transverse relatif entre sphères. L'hypothèse d'absence de micro-glissement revient à écrire que la force tangentielle n'atteint pas en amplitude la force normale  $F_N$  appliquée multipliée par le coefficient de friction statique  $f$  des sphères, soit  $|Q_T| \leq fF_N$ . Dans ce cas, le déplacement transverse  $U^t$  est inférieur à la valeur  $fF_N/K(F_N)$  sinon le glissement apparaît. Pour des sphères de rayon  $R$ , la contrainte transverse vaut  $\sigma = Q_T/R^2$  et la déformation transverse  $\varepsilon = U^t/2R$ . En reportant dans l'équation (3.47) les valeurs de contraintes et déformations transverses, la relation contrainte/déformation du contact individuel se présente sous la forme

$$\sigma = \frac{2}{R}K(F_N)\varepsilon = K'(F_N)\varepsilon, \quad (3.48)$$

où  $K'(F_N) = \frac{2}{R}K(F_N)$  est équivalent à un module élastique. En respectant la loi de Coulomb de condition de non glissement, la contrainte critique à ne pas dépasser pour éviter le glissement vaut :

$$\sigma_{cr} = \frac{fF_N}{R^2}. \quad (3.49)$$

Il est maintenant possible de discuter du comportement linéaire ou non linéaire d'un élément micro-mécanique individuel suivant que la contrainte transverse du contact atteigne ou non la valeur critique (3.49) à laquelle apparaît le glissement.

#### *Cas d'un contact purement linéaire*

Si, pour une déformation acoustique transverse d'amplitude  $\varepsilon_A$ , la contrainte transverse pour le contact chargé par une force statique normale  $F_N$  n'excède pas la valeur critique  $\sigma_{cr}$ , alors l'élément micro-mécanique considéré est purement linéaire. La relation contrainte/déformation associée à cet élément est présentée sur la figure (3.21). Cette relation ne présente alors aucun hystérésis et le comportement au niveau du contact est réversible.

La condition de validité du comportement linéaire décrit ci-dessus est que la contrainte, associée à la déformation acoustique transverse maximum d'amplitude  $\varepsilon_A$ ,

$$\sigma(\varepsilon_A) = K'(F_N)\varepsilon_A < \sigma_{cr} \quad (3.50)$$

ne dépasse pas la valeur critique  $\sigma_{cr}$ . Le cas critique  $\sigma(\varepsilon_A) = \sigma_{cr}$  de non-glissement,

$$K'(F_N^{cr})\varepsilon_A = \frac{fF_N^{cr}}{R^2}, \quad (3.51)$$

permet de définir la force normale statique critique  $F_N^{cr}$  en dessous de laquelle intervient le glissement. La relation contrainte/déformation présentée sur la figure (3.21) est donc valable pour des contacts soumis à des forces normales  $F_N > F_N^{cr}(\varepsilon_A)$ . La contribution de cet élément purement linéaire aux non-linéarités de la relation contrainte/déformation introduites dans le paramètre de Read calculé

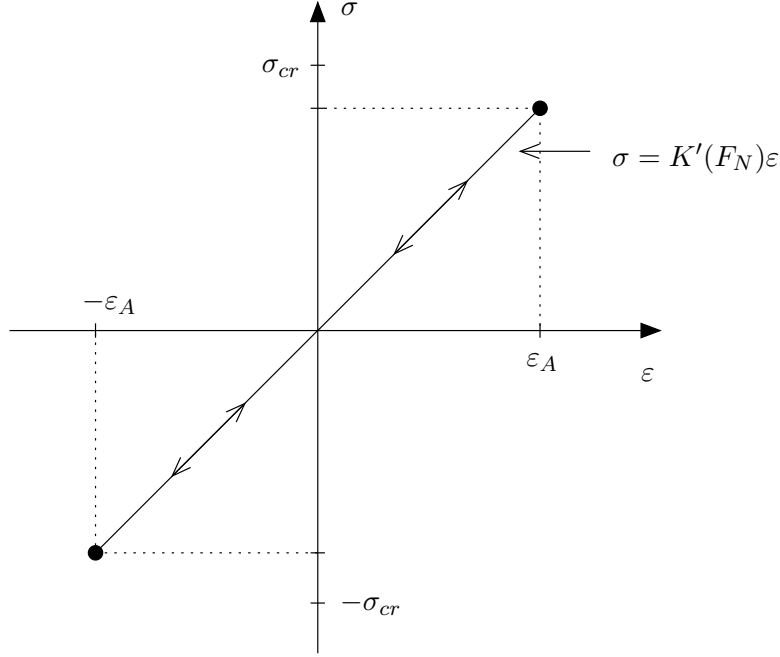


FIG. 3.21 – Comportement linéaire d'un élément micro-mécanique.

par l'équation (3.46) est nulle. En effet, maintenant que la force statique critique  $F_N^{cr}(\varepsilon_A)$ , induisant du glissement (et donc des non-linéarités), a été introduite, la paramètre de Read calculé par l'équation (3.46) peut être modifié

$$r = \frac{\pi}{\varepsilon_A} \frac{\int_0^{F_N^{cr}(\varepsilon_A)} n(F_N) dF_N \oint \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) d\varepsilon}{\int_0^{F_N^{cr}(\varepsilon_A)} n(F_N) dF_N \oint \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) \cos(\theta) d\theta}, \quad (3.52)$$

en limitant les bornes d'intégration de la distribution statistique de forces normales uniquement sur la gamme de forces statiques  $0 < F_N < F_N^{cr}(\varepsilon_A)$  impliquant du glissement.

#### *Cas d'un contact avec glissement*

Lorsque la contrainte critique  $\sigma_{cr}$  est atteinte pour des forces normales  $F_N < F_N^{cr}(\varepsilon_A)$ , les sphères originellement en contact glissent l'une sur l'autre. Un tel comportement non linéaire est présenté sur la partie supérieure de la figure 3.22. La relation  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  est une boucle dont l'aire représente l'énergie dissipée par cycle acoustique. Cette boucle d'hystérésis autour du comportement linéaire  $\sigma = K'(F_N)\varepsilon$  est symétrique par rapport à l'origine. Parcourons la courbe  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  à partir du point A. En augmentant progressivement la déformation  $\varepsilon$ , la contrainte augmente linéairement avec la déformation jusqu'à ce que la valeur  $\sigma_{cr}$  soit atteinte pour une déformation  $2\varepsilon_{cr} - \varepsilon_A$  au point B. La condition (3.50) n'est alors plus respectée et le glissement se traduit par une contrainte transverse constante avec l'augmentation de la déformation sinusoïdale appliquée jusqu'à la déformation maximum  $\varepsilon_A$  (point C). Lorsque la déformation diminue, la condition de linéarité est alors valable  $\sigma < \sigma_{cr}$  et les

variations sont à nouveau linéaires en amplitude jusqu'au point  $D$ . Seule la partie des déformations positives de la courbe hystérétique est décrite, puisque par symétrie centrale, le comportement est symétrique pour les déformations négatives.

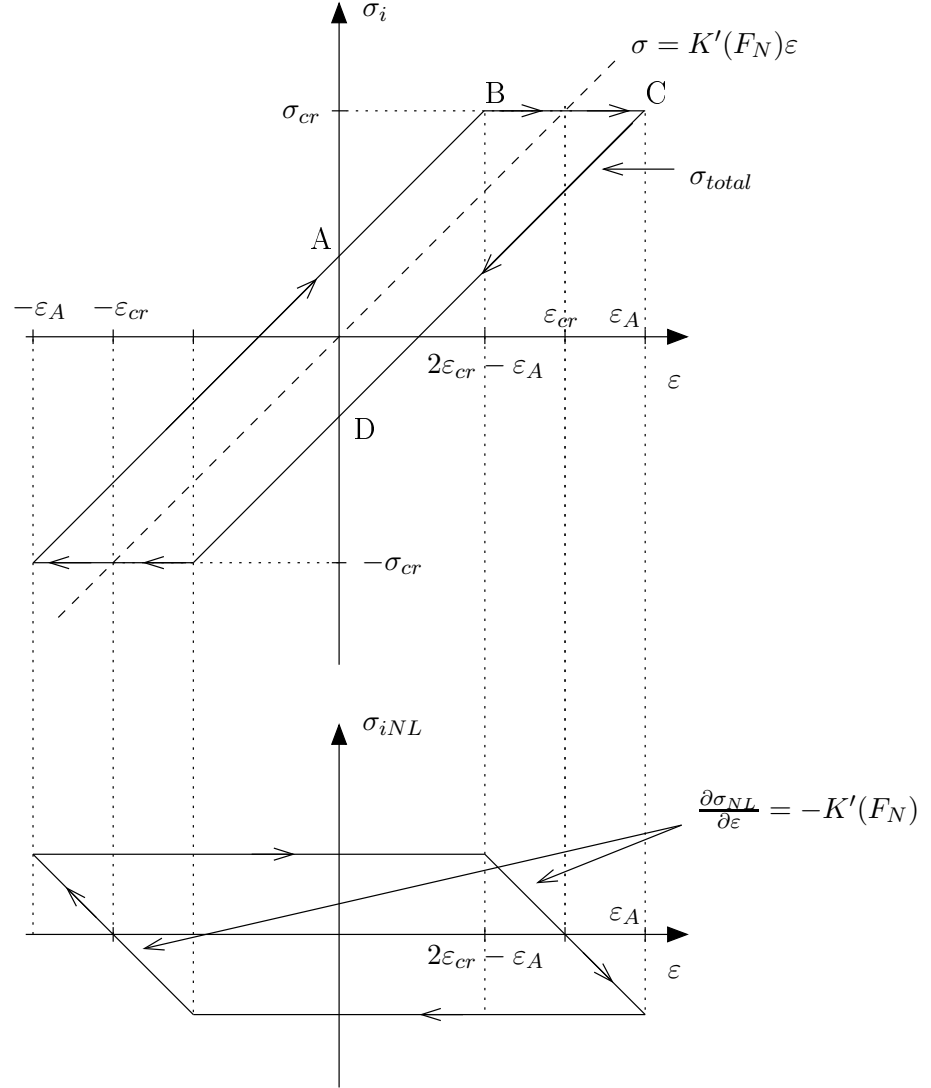


FIG. 3.22 – Comportement non linéaire d'un élément micro-mécanique (en haut) et sa contribution aux non-linéarités de la relation contrainte/déformation (en bas).

Sur la partie inférieure de la figure (3.22) est représentée la contribution non linéaire de la relation contrainte/déformation. Pour l'obtenir, il suffit de soustraire à la fonction  $\sigma_{total}$  hystérétique la contribution linéaire  $\sigma = K'(F_N)\varepsilon$ . Si la contrainte critique n'est pas atteinte, l'écart entre la boucle d'hystérésis et la relation linéaire est constant. Lors du glissement, la variation de la composante non linéaire de la contrainte pour une déformation croissante est négative  $\partial \sigma_{NL} / \partial \varepsilon = -K'(F_N)$ .

A partir de ce modèle hystérétique sont évaluées les contributions à l'élasticité non linéaire et à

la dissipation non linéaire. Pour cela le paramètre de Read défini par l'équation (3.52) est estimé. Le numérateur de cette équation comporte le terme  $\oint \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) d\varepsilon$  qui représente l'aire de la boucle hystérétique. Puisque le modèle considéré ne prend pas en compte de dissipation pour le comportement linéaire, les aires de la courbe pour la boucle hystérétique  $\sigma_{total}$  et de sa contribution non linéaire  $\sigma_{iNL}(\varepsilon)$  sont égales. Il est alors simple de calculer cette aire géométriquement

$$\oint \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) d\varepsilon = 4\sigma_{cr}(\varepsilon_A - \varepsilon_{cr}), \quad (3.53)$$

où la déformation critique est obtenue par la relation linéaire  $\sigma_{cr} = K(F_N)\varepsilon_{cr}$ .

L'intégrale temporelle  $\oint \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) \cos(\theta) d\theta$  au dénominateur de l'équation (3.52) est calculée par intégration par parties,

$$\oint \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) d(\sin(\theta)) = [\sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) \sin(\theta)]_t^{t+T} - \oint \frac{\partial \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N)}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \sin(\theta) d\theta, \quad (3.54)$$

en écrivant  $\cos(\theta) d\theta = d(\sin(\theta))$ , et où  $T$  est la période de la sollicitation acoustique. Le premier terme du membre de droite de l'équation (3.54) est nul par  $T$ -périodicité. La déformation acoustique sinusoïdale étant notée par convention  $\varepsilon = \varepsilon_A \cos(\theta)$ , l'équation (3.54) devient

$$\oint \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) d(\sin(\theta)) = \varepsilon_A \oint \frac{\partial \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N)}{\partial \varepsilon} \sin^2(\theta) d\theta. \quad (3.55)$$

Il reste à déterminer sur quels intervalles temporels la dérivée de la composante non linéaire de la contrainte par rapport à la déformation est non nulle. A partir de la contribution non linéaire de la contrainte présentée sur la figure 3.22, la dérivée  $\partial \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) / \partial \varepsilon$  est tracée sur la figure 3.23, ainsi qu'une période de la déformation acoustique associée. Le glissement apparaît avant la déformation maximale  $\varepsilon_A$  pour la valeur  $2\varepsilon_{cr} - \varepsilon_A$ . Ce phénomène commence au temps  $\theta = -\Delta\theta$  sur la courbe de déformation, d'où

$$\cos(\Delta\theta) = 2\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_A} - 1. \quad (3.56)$$

Il est clair, d'après la figure (3.23), que l'intégration temporelle de l'équation (3.55) ne porte que sur les intervalles  $-\Delta\theta < \theta < 0$  et  $\pi - \Delta\theta < \theta < \pi$  sur une période acoustique, et l'intégrale (3.55) devient après calcul

$$\oint \sigma_{iNL}(\varepsilon, F_N) d(\sin(\theta)) = -K'(F_N)\varepsilon_A[\Delta\theta - \frac{1}{2}\sin(2\Delta\theta)]. \quad (3.57)$$

En substituant les équations (3.53) et (3.57) dans l'expression du paramètre de Read non linéaire (3.52), celui-ci s'écrit

$$r = -\pi \frac{\int_0^{F_N^{cr}(\varepsilon_A)} n(F_N) dF_N K'(F_N) \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_A} (1 - \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_A})}{\int_0^{F_N^{cr}(\varepsilon_A)} n(F_N) dF_N K'(F_N) [\Delta\theta - \frac{1}{2}\sin(2\Delta\theta)]}. \quad (3.58)$$

D'après la définition de la contrainte critique (3.49) et de la force normale critique obtenue pour l'amplitude de déformation acoustique maximale  $F_N^{cr} = F_N^{cr}(\varepsilon_A)$ , le rapport des déformations

$$\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_A} = \left( \frac{F_N}{F_N^{cr}} \right) \frac{K'(F_N^{cr})}{K'(F_N)}, \quad (3.59)$$



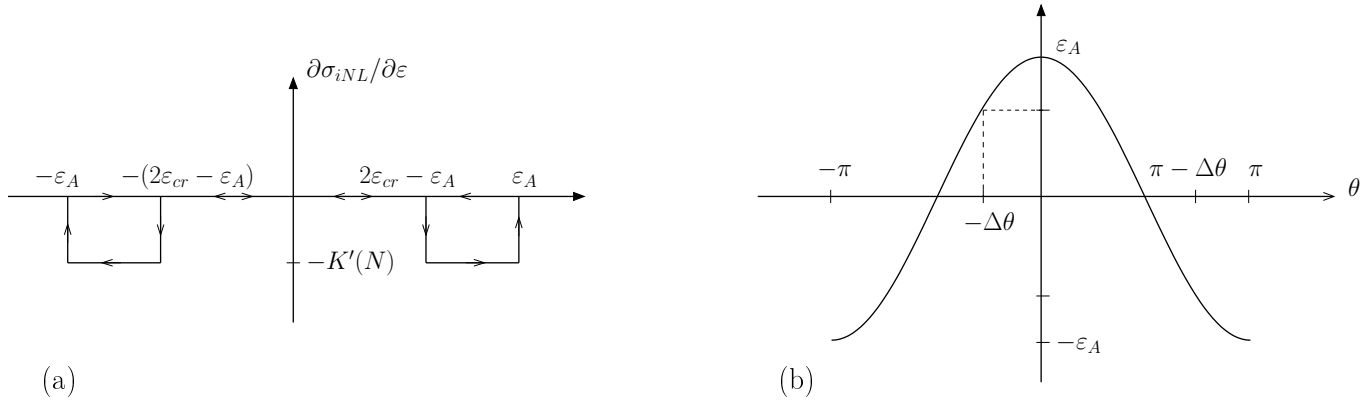


FIG. 3.23 – Dérivée de la contribution non linéaire (a) de la contrainte représentée sur la figure 3.22 et une période de la déformation acoustique associée (b).

peut être uniquement décrit en fonction des forces normales appliquées. En rappelant que selon la théorie de Hertz-Mindlin, la raideur transverse du contact dépend du chargement normal en puissance  $1/3$ ,

$$\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_A} = \left(\frac{F_N}{F_N^{cr}}\right)^{2/3}. \quad (3.60)$$

Le temps pour lequel le glissement apparaît (3.56) est obtenu

$$\cos(\Delta\theta) = 2\left(\frac{F_N}{F_N^{cr}}\right)^{2/3} - 1. \quad (3.61)$$

En reportant les équations (3.60) et (3.61) dans l'équation (3.58), et en introduisant une nouvelle coordonnée  $\xi = F_N/F_N^{cr}(\varepsilon_A)$  pour le chargement, le paramètre de Read uniquement non linéaire s'écrit

$$r = \pi \frac{\int_0^1 d\xi n(F_N^{cr}\xi)\xi(1 - \xi^{2/3})}{\int_0^1 d\xi n(F_N^{cr}\xi)\xi^{1/3}[\Delta\theta - \frac{1}{2}\sin(2\Delta\theta)]}, \quad (3.62)$$

où le temps  $\Delta\theta$  d'apparition du glissement se déduit de

$$\cos(\Delta\theta) = 2\xi^{2/3} - 1. \quad (3.63)$$

La contribution de la dissipation non linéaire au paramètre de Read est représentée au numérateur de l'expression (3.62) par la fonction  $f_D = \xi(1 - \xi^{2/3})$ . Au dénominateur, le terme  $f_E = \xi^{1/3}[\Delta\theta - \frac{1}{2}\sin(2\Delta\theta)]$  représente la contribution de l'élasticité non linéaire de la relation contrainte/déformation.

#### *Contribution non linéaire de la relation $\sigma = \sigma(\varepsilon)$*

Il est maintenant possible de quantifier dans quelle mesure les non-linéarités présentes dans l'équation d'état de l'élément micro-mécanique considéré vont modifier le paramètre de Read. Il a

été noté en introduction de ce modèle qu'a priori, il est prévu une plus grande contribution aux non-linéarités dissipatives pour un contact présentant un fort glissement (car l'aire de la boucle hystérétique augmente). Nous allons maintenant discuter des effets d'une variation de la relation contrainte/déformation, en partant d'un élément peu glissant jusqu'à un élément fortement glissant, sur les non-linéarités dissipatives et élastiques représentées respectivement par les fonctions  $f_D$  et  $f_E$ .

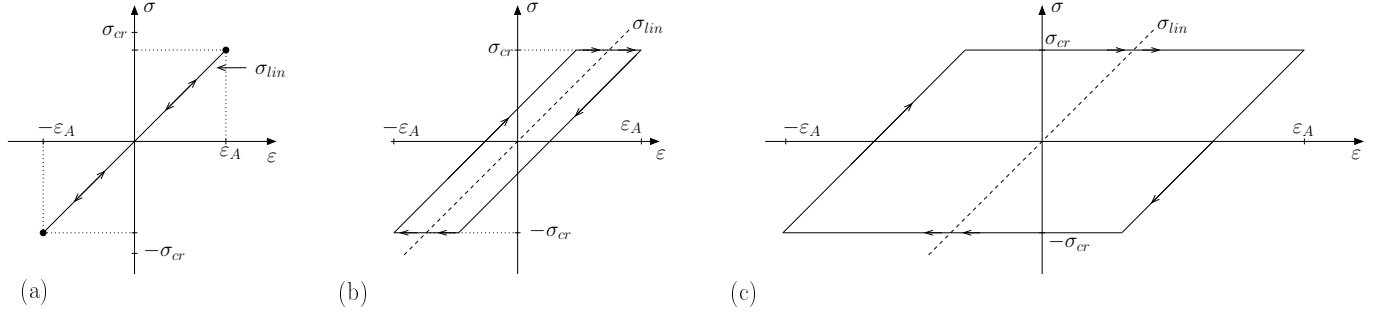


FIG. 3.24 – Relation contrainte/déformation d'un élément linéaire (a), faiblement glissant (b) et fortement glissant (c).

Les différentes relations contrainte/déformation étudiées dans ce modèle, sont une relation purement linéaire  $\sigma = K'(F_N)\varepsilon$ , une boucle d'hystérésis pour un contact présentant un faible glissement (figure 3.24(b)) et un contact fortement glissant (figure 3.24(c)). Il a déjà été mentionné qu'un contact présentant un comportement purement linéaire ne contribue pas au paramètre de Read non linéaire défini par l'équation (3.52). En effet, le chargement normal  $F_N^{cr}$ , sous une excitation acoustique d'amplitude de déformation  $\varepsilon_A$ , n'est jamais inférieur au chargement critique  $F_N^{cr}(\varepsilon_A)$  induisant du glissement. Lorsque le contact commence à glisser sous l'action de l'onde acoustique, la relation  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  est modifiée (voir la figure 3.24(b)). Cette situation correspond formellement au cas limite  $\xi \rightarrow 1$  pour un chargement normal inférieur au chargement critique  $F_N < F_N^{cr}$  et  $F_N \rightarrow F_N^{cr}$ . En posant  $\xi = 1 - \Delta\xi$  où  $\Delta\xi \rightarrow 0$  est un petit paramètre, et en calculant le temps  $\Delta\theta$  où apparaît le glissement à partir de l'équation (3.63) par  $\Delta\theta \sim 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\Delta\xi}$ , les fonctions non linéaires  $f_E$  et  $f_D$  sont approximées après développement limité à l'ordre 2 sur le petit paramètre  $\Delta\xi$  par

$$f_D \sim \frac{2}{3}\Delta\xi \quad (3.64)$$

$$f_E \sim \frac{16}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3(\Delta\xi)^{3/2}. \quad (3.65)$$

La dépendance sur le paramètre  $\Delta\xi$  est linéaire pour la fonction non linéaire dissipative et est une loi en puissance  $3/2$  pour la fonction non linéaire élastique. Un ajout de contacts présentant du glissement (donc une augmentation de  $\Delta\xi$ ) aura ainsi une contribution plus importante sur la dissipation non linéaire que sur l'élasticité non linéaire et résultera en une augmentation du paramètre de Read.

Observons maintenant la contribution aux non-linéarités pour un contact présentant un fort glissement dont la relation contrainte/déformation est présentée sur la figure 3.24(c). L'aire de la boucle hystérétique semble indiquer une plus grande contribution aux non-linéarités dissipatives qu'aux

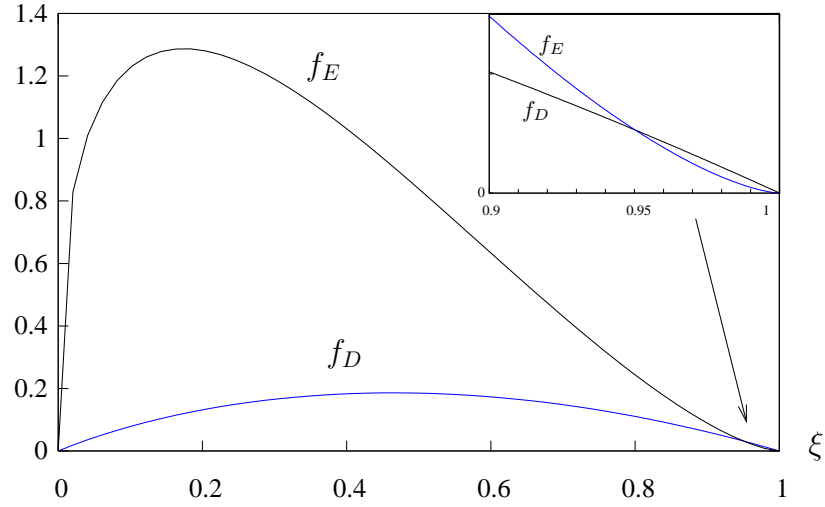


FIG. 3.25 – Fonctions non linéaires élastique  $f_E$  et dissipative  $f_D$  en fonction du paramètre  $\xi = \frac{N}{N_{cr}}$ .

non-linéarités élastiques. Une telle situation de comportement micro-mécanique apparaît lorsque le chargement normal  $F_N$  est très inférieur au chargement normal critique  $F_N^{cr}(\varepsilon_A)$ . Dans ce cas, le paramètre  $\xi = F_N/F_N^{cr}$  est proche de zéro, et le temps  $\Delta\theta$  s'approche de la valeur  $\pi$  d'après l'équation (3.63). Les fonction  $f_E$  et  $f_D$  sont alors approximées par :

$$f_D \sim \xi \quad (3.66)$$

$$f_E \sim \pi(\xi)^{1/3}. \quad (3.67)$$

Une augmentation du glissement du contact influence alors principalement la non-linéarité élastique (car  $(\xi)^{1/3} \gg \xi$  lorsque  $\xi \rightarrow 0$ ) et résulte en la diminution du paramètre de Read non linéaire.

Le comportement des fonctions non linéaires dissipatives et élastiques approximées ici dans des cas limites du paramètre  $\xi$  sont présentées sur la figure (3.25) pour  $0 < \xi < 1$ .

Les résultats obtenus par ce modèle quantitatif simple permettent de discuter des implications du comportement acoustique non linéaire expérimentalement observée sur la physique des contacts pour le processus de compaction granulaire. Il a été observé une augmentation du paramètre de Read non linéaire (figure 3.18). Puisque ce paramètre est défini comme le rapport de l'atténuation non linéaire sur l'élasticité non linéaire, et que les deux paramètres hystérétiques élastiques et dissipatifs diminuent au cours de la compaction (figure 3.14), cette observation est à relier avec l'augmentation du rôle de la dissipation non linéaire relativement à celui de l'élasticité non linéaire. En effet, le paramètre non linéaire élastique  $\alpha_f$  décroît plus rapidement que la paramètre non linéaire dissipatif  $\alpha_Q$ . Aux faibles nombres de sollicitations,  $\alpha_f$  est supérieur à  $\alpha_Q$ , jusque  $8.10^3$  taps environ. Cette situation correspond formellement à  $\xi \rightarrow 0$  et est illustrée par la première partie de la figure 3.25. Ce comportement micro-mécanique est attribué dans le modèle proposé à des contacts fortement glissants. Le paramètre de Read

obtenu est alors faible, puisqu'un contact fortement glissant contribue plus fortement à l'élasticité non-linéarité qu'à la dissipation non linéaire. Pour  $n_{tap} \simeq 8.10^3$  environ,  $\alpha_f$  vaut  $\alpha_Q$  et la contribution aux non-linéarités élastiques et dissipatives est identique. Au dessus de  $n_{tap} \simeq 8.10^3$ , le paramètre élastique non linéaire  $\alpha_f$  est inférieur au paramètre dissipatif non linéaire  $\alpha_Q$ , impliquant une augmentation du paramètre de Read calculé. Cette situation correspond à  $\xi \rightarrow 1$ , représentée sur l'insert de la figure 3.25. Il est montré que ce cas correspond aux contacts faiblement glissants, dont le chargement normal est proche du chargement critique  $F_N^{cr}$ . La contribution d'un élément micro-mécanique présentant un faible glissement est alors plus importante sur la dissipation non linéaire que sur l'élasticité non linéaire, résultant en une augmentation du paramètre de Read. L'ensemble de ces observations est résumé sur la figure 3.26 permettant d'associer l'évolution du paramètre de Read à la relation contrainte/déformation de l'élément considéré.

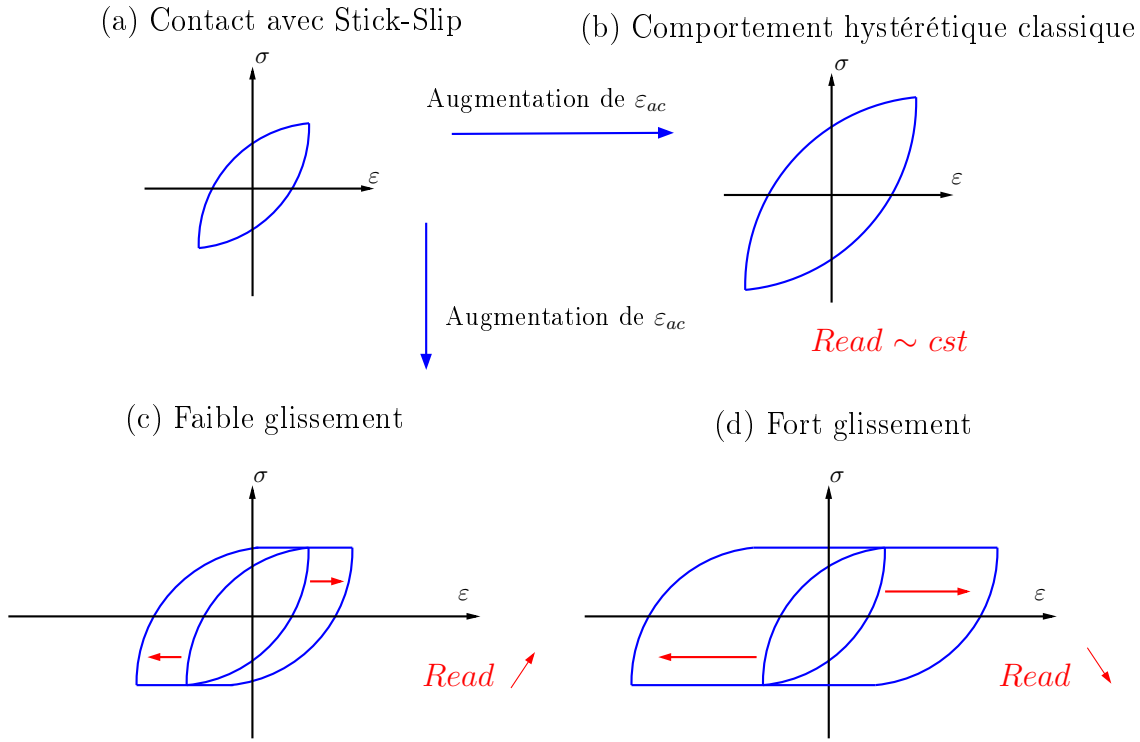


FIG. 3.26 – Comparaison de l'évolution du paramètre de Read non linéaire pour le cas d'un contact présentant une non-linéarité de type Hertz-Mindlin (a), un comportement hystérétique classique (b), un faible (c) et fort (d) glissement.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, différentes expériences d'acoustique non linéaire ont été menées pour sonder l'empilement au cours de processus de compaction. Les expériences de générations d'harmoniques et de génération de fréquence différence ont quantitativement montré une diminution des non-linéarités acoustiques au cours de la compaction granulaire. Lors de la génération d'harmoniques d'une onde monofréquentielle émise dans le milieu, le paramètre de non-linéarité quadratique diminue avec des variations très supérieures à celles observées jusqu'ici (mesures de compacité). Pour la génération d'ondes par mélange de fréquences, la transition  $2 \rightarrow 3/2$ , sur la dynamique en amplitude de l'onde de fréquence différence, vers les plus hautes déformations statiques entre contact a été quantitativement interprétée comme la diminution du nombre de contacts faibles. Cette transition est associée au clappement des contacts sous l'action de l'onde acoustique. Un modèle simple est introduit, permettant d'expliquer le contenu spectral riche observé lors du mélange de deux hautes fréquences  $f_1$  et  $f_2$ . Le rôle des singularités de la relation contrainte/déformation de Hertz, ayant pour origine la fonction de Heaviside décrivant le clappement, est analysé pour comprendre la génération de composantes fréquentielles non décrites par la première interaction non linéaire.

Dans ces deux expériences non linéaires, le suivi acoustique de la compaction est effectué par des mesures à fréquence fixe (la fréquence fondamentale et ses harmoniques, la fréquence différence générée par les ondes de pompage) dont le comportement linéaire varie sur une expérience de compaction. L'atténuation linéaire perturbe alors la compréhension des phénomènes observés. Il apparaît qu'un suivi acoustique dynamique s'impose pour obtenir à la fois l'information linéaire et non linéaire sur la propagation acoustique. Ce suivi dynamique est effectué au moyen de l'étude des résonances non linéaires du milieu. Le premier mode de résonance du milieu est identifié, puis étudié en fonction du niveau d'excitation de l'onde sonore. La fréquence de résonance linéaire croît de près de 30% de sa valeur initiale, et sature en fin de compaction comme la mesure de compacité du milieu. La sensibilité de ce paramètre linéaire à l'évolution du milieu permet déjà d'espérer un suivi acoustique in-situ d'un empilement granulaire.

Ensuite, le caractère hystérétique quadratique du milieu est identifié par la mesure du décalage de la fréquence de résonance avec l'amplitude acoustique d'excitation, et la mesure de l'atténuation non linéaire du milieu. Il est observé que les non-linéarités hystérétiques élastique et dissipatives diminuent au cours de la compaction. Cependant, le rôle relatif de la dissipation non linéaire par rapport à l'élasticité non linéaire augmente durant ce processus. Ceci est quantifié par l'intermédiaire du paramètre de Read. Une première étape a été de définir un nouvel observable acoustique, le paramètre de Read non linéaire, dépendant uniquement des non-linéarités de la relation contrainte/déformation. Ce paramètre, uniquement non linéaire, augmente au cours de la compaction, dans une gamme de sollicitation du milieu différente de celle des variations des paramètres linéaires (fréquence de résonance linéaire, vitesse linéaire des ondes). Un modèle qualitatif simple est proposé, analysant les contributions des

non-linéarités élastiques et dissipatives des contacts au sein du milieu granulaire. Il est analytiquement montré qu'un contact fortement glissant contribue de manière plus importante à l'élasticité non linéaire qu'à la dissipation non linéaire. De même, l'analyse de la relation contrainte/déformation d'un contact faiblement glissant présente une plus faible contribution à la non-linéarité élastique qu'à la dissipation non linéaire. Ce modèle permet d'expliquer quantitativement les observations expérimentales effectuées sur le paramètre de Read. D'après ces résultats, le processus de compaction s'accompagne d'une diminution du nombre de contacts fortement glissants relativement au nombre de contacts glissant faiblement.

## Chapitre 4

# Influence des chaînes de force sur la propagation acoustique

### 4.1 Introduction

Dans les chapitres 2 et 3, la compaction des milieux granulaires a été étudiée par des méthodes expérimentales adaptées à la caractérisation des propriétés acoustiques linéaires et non linéaires du milieu. Les méthodes d'acoustique non linéaire apportent des informations supplémentaires aux méthodes linéaires pour la caractérisation de la micro-structure du milieu, et ont permis d'expliquer quantitativement l'évolution des contacts faibles au cours du processus de compaction. Il est cependant difficile de décrire la propagation d'ondes acoustiques, même linéaires, au sein des milieux granulaires à cause de la complexité (et la méconnaissance) de la distribution de contacts, des chaînes de force et du désordre qui en découle (figure 1.5 du premier chapitre).

Actuellement, il est donc complexe de décrire la propagation d'ondes dans des assemblages granulaires désordonnés soumis à des chargements mécaniques. L'application d'un chargement modifie les propriétés mécaniques du milieu, et induit des inhomogénéités spatialement de chargement local, les chaînes de force. Même dans les empilements initialement réguliers, la distribution de chaînes de force n'est pas périodique, et la solution générale du problème de propagation acoustique consiste à étudier la diffusion multiple des ondes au sein du milieu. Cependant, de récentes expériences dans des assemblages de cylindres ordonnés [86] montrent par photoélasticimétrie que la distribution spatiale des chaînes de force n'est pas complètement irrégulière. A l'échelle de quelques chaînes de force, celles-ci semblent régulièrement espacées et parallèles. A l'échelle mésoscopique, le réseau de chaînes présente des sous-systèmes de chaînes de force qui diffèrent les uns des autres dans leur orientation et dans leur périodicités spatiales de chaînes de force.

Dans le modèle développé par la suite, il est alors proposé de considérer la distribution spatiale des chaînes de force comme périodique plutôt qu'irrégulière, et d'observer l'influence de ce réseau sur la propagation acoustique. Il est naturel en première approximation d'analyser l'influence de chaînes de force caractérisées par une unique période spatiale. Lorsque la modulation des propriétés d'un

matériau est périodique, le problème de la propagation d'une onde est grandement simplifié puisque la diffusion multiple résulte en la modification de la relation de dispersion et des modes propres du système. En d'autres termes, le problème de la diffusion multiple dans les systèmes périodiques est équivalent à l'évaluation du spectre des modes propres acoustiques. Dans notre cas, il convient alors de se demander :

- si la structure périodique des chaînes de force entraîne l'apparition de nouveaux modes acoustiques,
- si des bandes de fréquences interdites apparaissent,
- quelles sont les relations de dispersion associées à chaque mode,
- quelle est la structure spatiale de chacun de ces modes.

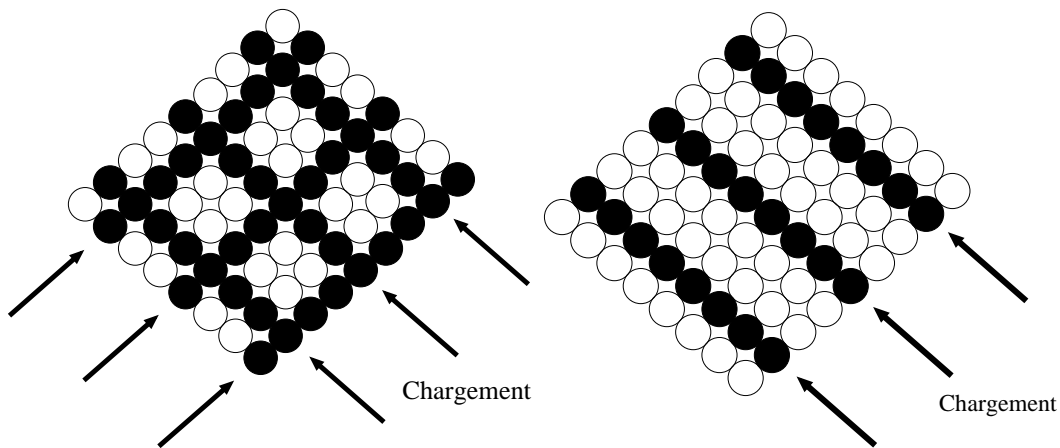


FIG. 4.1 – Réseau de chaînes de force dans un assemblage granulaire régulier. a) Périodicité selon deux directions de l'espace du réseau; b) Une seule orientation des chaînes de force.

Dans les milieux granulaires réguliers bidimensionnels, les chaînes de force semblent périodiques selon deux directions principales [86, 13] (voir la figure 4.1(a)), mais il est possible de choisir un chargement particulier du milieu granulaire ne créant qu'une seule orientation des plans de force (voir la figure 4.1(b)). Il semble alors raisonnable de commencer l'analyse mathématique de la propagation d'ondes dans un réseau granulaire par cette configuration simpliste du milieu granulaire.



## 4.2 Position du problème et résolution analytique

### 4.2.1 Géométrie du problème considéré et équation du mouvement

Un assemblage régulier cubique simple de cylindres dans le plan  $(x,z)$  est considéré [37], comme sur la figure 4.2. Les cylindres, de diamètre  $a$ , sont infiniment longs suivant l'axe  $y$  et chacun est connecté à quatre voisins par des contacts orthogonaux. Le problème étant bidimensionnel, des plans de force sont ici considérés (et non des chaînes de force), périodiques suivant l'axe  $x$  avec une période de modulation  $D$ . Il en résulte que le paramètre  $N = \frac{D}{a}$  indique la période en terme de nombre de cylindres ( $N - 1$  cylindres entre chaque plan de force). Une hypothèse de ce problème est que l'onde acoustique se propage uniquement à travers la phase solide du matériau en négligeant les couplages avec le fluide environnant (l'air par exemple).

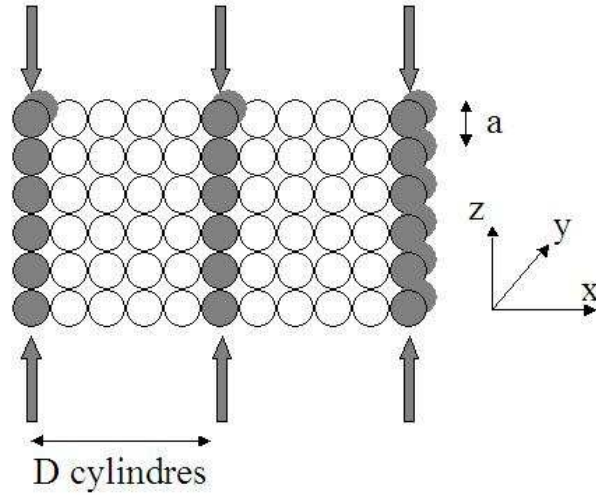


FIG. 4.2 – Modèle discret bidimensionnel de cylindres périodiquement chargés

Un avantage de ce modèle réside dans la description d'ondes de cisaillement, polarisées le long de l'axe des cylindres (axe  $y$ ). Le déplacement mécanique associé à cette onde est orienté suivant l'axe  $y$  et ne change pas l'orientation des cylindres dans le plan  $(x,z)$ . Il n'existe alors aucun couplage avec des ondes longitudinales dans ce plan. Chaque cylindre peut être caractérisé spatialement dans le plan  $(x,z)$  par un couple d'entiers  $(m,n)$ , et la position d'un cylindre est définie par ses coordonnées

$$\begin{cases} x_m = am, \\ z_n = an. \end{cases}$$

Afin d'établir la loi du mouvement d'un cylindre, il convient de décrire la force exercée par les autres cylindres sur ce dernier. Cette force est supposée proportionnelle au déplacement relatif entre deux cylindres suivant l'axe  $y$ . La relation force/déplacement est linéaire, de la forme  $F = -KU_y$ , avec  $K$  la raideur entre deux cylindres,  $F$  la force appliquée et  $U_y$  le déplacement relatif entre deux cylindres. Le problème considéré porte sur l'étude d'une variation des propriétés élastiques du milieu,

et non géométriques. Ainsi, des raideurs différentes entre cylindres sont introduites suivant la direction du chargement. La notation  $\alpha_{x,z}$  est introduite pour désigner les raideurs horizontales (selon  $(Ox)$ ) et verticales (selon  $(Oz)$ ). Pour prendre en compte l'augmentation de rigidité au niveau des plans de force, les paramètres  $\alpha_z^{s,f}$  sont introduits pour les raideurs verticales des contacts faibles (hors des plans de force, notées  $s$  pour souple) et forts (le long des plans de force, notées  $f$  pour fort). Par conséquent, les raideurs introduites respectent toujours  $\alpha_z^f \geq \alpha_z^s$ . Le chargement périodique entraîne donc une modulation des propriétés élastiques du milieu (voir la figure 4.3), entre autre par une modulation des raideurs verticales (suivant l'axe  $z$ ).

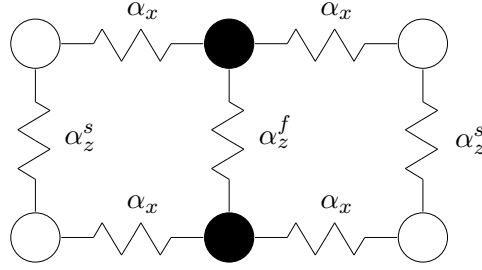


FIG. 4.3 – Modulation des raideurs verticales par les plans de force

L'équation du mouvement associée à chaque cylindre est obtenue en écrivant la seconde loi de Newton linéarisée pour le cylindre localisé en  $(m,n)$

$$M \frac{\partial^2 U_{m,n}}{\partial t^2} = \alpha_z^s [U_{m,n+1} - 2U_{m,n} + U_{m,n-1}] + \alpha_x [U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}] + (\alpha_z^f - \alpha_z^s) [U_{m,n+1} - 2U_{m,n} + U_{m,n-1}] \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta_{m,Np}, \quad (4.1)$$

où  $M$  est la masse par unité de longueur d'un cylindre, et  $U_{m,n}$  son déplacement selon  $(Oy)$ .

Les deux premiers termes du membre de droite sont relatifs aux forces entre cylindres sans chargement additionnel, donc de raideur  $\alpha_x$  et  $\alpha_z^s$ , pour les orientations horizontales (variations sur l'entier  $m$ ) et verticales (variations sur l'entier  $n$ ). Le troisième terme représente une perturbation de force due à l'ajout de raideur  $(\alpha_z^f - \alpha_z^s)$  pour les cylindres chargés le long des plans de force localisés aux positions  $x_p = Dp$ , correspondant aux indices  $m = \frac{D}{a}p = Np$ . Le plan de force ( $m = 0$ ) est choisi comme origine du repère, de sorte que tous les plans chargés sont localisés par  $\sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta_{m,Np}$ .

#### 4.2.2 Cas particulier de l'absence de plan de force

Le problème général à résoudre en présence d'inhomogénéités périodiques est la description de la propagation des ondes élastiques, qui peut se faire par l'obtention de la relation de dispersion du système. Dans cette section le cas simplifié  $\alpha_z^f = \alpha_z^s = \alpha_z$  est étudié, c'est-à-dire un assemblage régulier cubique de cylindres chargés de la même manière selon les axes  $(Ox)$  et  $(Oz)$  (sans chargement additionnel). Pour déterminer la relation de dispersion du système (expression de la pulsation

d'une onde en fonction du nombre d'onde), la solution en onde plane harmonique de l'équation dynamique (4.1) est recherchée. Pour cela, une onde de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}(k_x, k_z)$  est considérée. Le déplacement du cylindre  $(m, n)$  peut alors s'écrire sous la forme

$$U_{m,n} = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = Ae^{i(\omega t - k_x a n - k_z a m)}. \quad (4.2)$$

En reportant cette expression du déplacement dans l'équation du mouvement simplifiée dans le cas sans plan de force, la relation de dispersion 2D du système devient

$$\omega^2 = \left(\frac{4\alpha_z}{M}\right) \sin^2\left(\frac{ak_z}{2}\right) + \left(\frac{4\alpha_x}{M}\right) \sin^2\left(\frac{ak_x}{2}\right), \quad (4.3)$$

avec  $k_x^2 + k_z^2 = k^2$ . Pour le cas de rigidités horizontales et verticales identiques, la symétrie du problème par rapport aux axes  $(Ox)$  et  $(Oz)$  est retrouvée dans l'expression (4.3). L'étude, dans le premier chapitre, du réseau périodique unidimensionnel de la chaîne de billes est ici étendue au cas bidimensionnel. L'étude de la relation (4.3) nécessite normalement de parcourir l'ensemble des vecteurs d'ondes permis. Or, dans un réseau de périodicité  $a$ , le nombre d'onde maximum autorisé pour la propagation d'ondes est  $k_{max} = \frac{\pi}{a}$ . Dans le domaine des nombres d'ondes, la première zone de Brillouin (voir la figure 4.4) représente l'espace des vecteurs d'ondes pouvant se propager. Les propriétés de périodicité de la pulsation  $\omega = \omega(\vec{k})$  rendent certains points du contour remarquables (au sens de la symétrie) et indiquent qu'il suffit alors de parcourir le vecteur d'onde  $\vec{k}$  sur le contour de la première zone de Brillouin  $\Gamma XM$  pour décrire complètement la propagation acoustique [11]. La première zone de Brillouin, ainsi introduite, est l'extension bidimensionnelle pour un système cubique simple de celle déjà étudiée au premier chapitre dans le cas unidimensionnel.

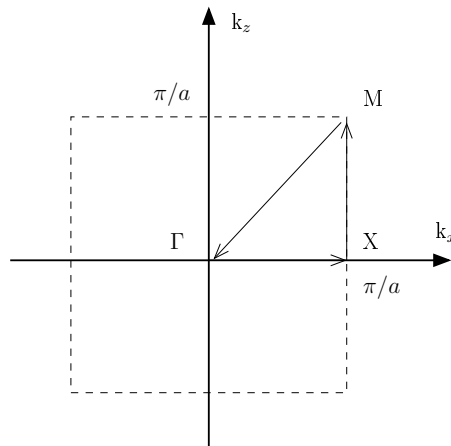


FIG. 4.4 – Première zone de Brillouin pour un réseau cubique simple et son contour  $\Gamma XM$

Les pulsations associées aux ondes propagatives dans le milieu sont données par la relation (4.3) lorsque le vecteur d'onde  $\vec{k}$  parcourt le chemin  $\Gamma XM$ . Les courbes de dispersion pour le système homogène sont présentées sur la figure 4.5 pour des nombres d'onde parcourant le contour de la première

zone de Brillouin. La propagation d'ondes suivant l'axe  $x$  uniquement (ou l'axe  $z$  par symétrie dans le cas homogène), correspondant aux nombres d'ondes  $\vec{k} = k_x \vec{x}$ ,  $k_z = 0$ , est représentée sur la partie  $\Gamma X$  de la courbe de dispersion. Pour  $k_z = 0$ , la relation de dispersion classique d'une chaîne de billes 1D est retrouvée

$$\omega^2 = \frac{4\alpha_x}{M} \sin^2\left(\frac{a k_x}{2}\right). \quad (4.4)$$

En introduisant la pulsation de coupure du système  $\omega_c = 2\sqrt{\frac{\alpha_x}{m}}$  (la pulsation maximale des ondes propagatives) et le nombre d'onde maximum  $k_{max} = \frac{\pi}{a}$  autorisé pour les ondes propagatives dans le réseau discret, la relation (4.4) devient

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{k_x}{k_{max}}\right). \quad (4.5)$$

Dans la limite basse fréquence  $ak_x \ll 1$ , l'approximation linéaire de l'équation (4.4) relie la pulsation de l'onde au nombre d'onde par :

$$\omega = a\sqrt{\frac{\alpha_x}{M}} k_x = c_s k_x. \quad (4.6)$$

La vitesse basse fréquence  $c_s = a\sqrt{\frac{\alpha_x}{M}}$  de propagation des ondes transversales dans l'assemblage cubique sans plan de force est ainsi définie. La pulsation  $\omega$  est adimensionnée par la vitesse  $c_s$ , et  $k_s = \frac{\omega}{c_s}$  est introduit comme le nombre d'onde de cisaillement basse fréquence en absence de plan de force. La déviation de la droite  $k_z = k_x$ , sur la partie  $\Gamma X$  de la courbe de dispersion (4.5), met en évidence le caractère dispersif du réseau discret considéré.

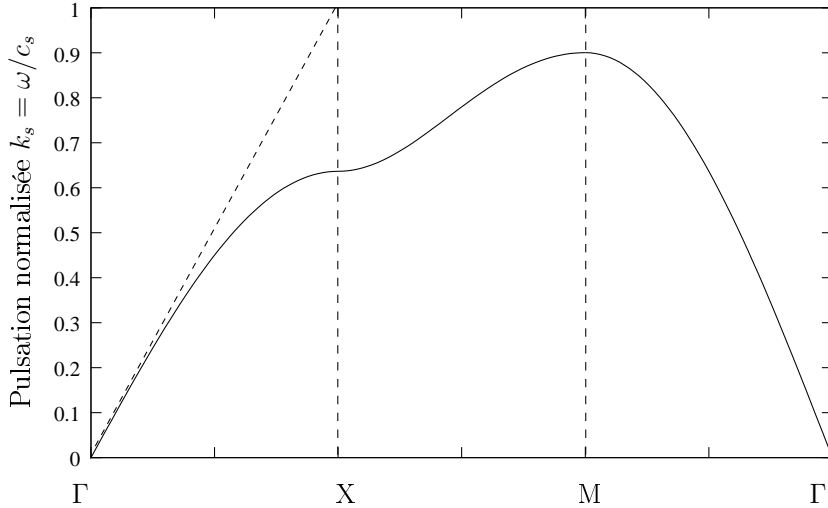


FIG. 4.5 – Courbe de dispersion pour le système sans plan de force sur le contour  $\Gamma X M$

### 4.2.3 Relation de dispersion du système avec plans de force

Dans le cas d'une modulation périodique additionnelle des propriétés du milieu, la forme d'ondes planes harmoniques de la relation (4.2) ne peut plus être utilisée. D'après le théorème de Bloch, les solutions en déplacement nécessitent de décomposer la constante  $A$  de l'onde plane considérée sur la base des vecteurs  $\vec{G} = (\vec{G}_x, \vec{G}_y, \vec{G}_z)$  du réseau réciproque. Cette opération est équivalente à une décomposition en série de Fourier spatiale. Par périodicité de la structure, la constante  $A$  est décomposée sur des fonctions périodiques (de période égale à celle des plans chargés). En définissant une cellule élémentaire du milieu comme le sous-système compris entre deux plans chargés et la périodicité étant suivant l'axe  $x$ , le vecteur  $\vec{G}_x$  du réseau réciproque a pour norme  $G_x = \frac{2\pi}{D}s$  où  $s \in [0, N-1]$ . La constante  $A$ , initialement introduite pour le mode plan homogène, devient dans le cas inhomogène

$$A(m) = \sum_{s=0}^{N-1} U_{\vec{k}}(s) e^{-i \frac{2\pi}{D} a m s}, \quad (4.7)$$

c'est-à-dire une fonction dépendante de l'abscisse  $m$  où la périodicité est introduite. Par conséquent, la solution de l'équation (4.1) pour une onde de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}(k_x, k_z)$  s'écrit

$$U_{m,n} = e^{i(\omega t - k_x a m - k_z a n)} \sum_{s=0}^{N-1} U_{\vec{k}}(s) e^{-i \frac{2\pi}{N} m s}. \quad (4.8)$$

L'étude porte maintenant sur le cas de raideurs horizontales et verticales identiques  $\alpha_x = \alpha_z^s$ , excepté dans les plans de force où  $\alpha_z^f \neq \alpha_z^s$ . En reportant le champ de déplacement d'un cylindre (4.8) dans l'équation du mouvement (4.1), l'équation du système inhomogène après décomposition sur la base des vecteurs réciproques est obtenue

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{N-1} [-M\omega^2 + 4\alpha_z^s (\sin^2(\frac{ak_z}{2}) + \sin^2(\frac{ak_x}{2} + \frac{\pi s}{N}))] U_{\vec{k}}(s) e^{-\frac{2i\pi}{N} m s} \\ & + 4(\alpha_z^f - \alpha_z^s) \sum_{s'=0}^{N-1} \sin^2(\frac{ak_z}{2}) U_{\vec{k}}(s') e^{-i \frac{2\pi}{N} m s} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta_{m, Np} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

L'opérateur  $\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (\dots) e^{+i \frac{2\pi}{N} m l}$ , équivalent à une intégration sur une période spatiale, est appliqué à l'équation précédente, et chaque somme est transformée avec la relation

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{+i \frac{2\pi}{N} (l-s)m} = \delta_{l,s}. \quad (4.10)$$

Ce résultat permet de faire la sommation sur l'indice  $s$  dans la première somme de l'équation (4.9) qui devient

$$\Sigma_1 = [-M\omega^2 + 4\alpha_z^s (\sin^2(\frac{ak_z}{2}) + \sin^2(\frac{ak_x}{2} + \frac{\pi l}{N}))] U_{\vec{k}}(l). \quad (4.11)$$

La seconde somme,

$$\Sigma_2 = \frac{4}{N} (\alpha_z^f - \alpha_z^s) \sin^2(\frac{ak_z}{2}) \sum_{s'=0}^{N-1} U_{\vec{k}}(s'), \quad (4.12)$$

se simplifie avec la contribution unique des termes  $m = 0$  et  $p = 0$ . De manière analogue à la vitesse  $c_s$  d'une onde de cisaillement basse fréquence sans plan de force, la vitesse de l'onde transverse 'rapide' le long des plans de force peut être définie par

$$c_f = a \sqrt{\frac{\alpha_z^f}{m}}. \quad (4.13)$$

L'équation (4.9) s'écrit finalement

$$[\sin^2(\frac{ak_z}{2}) + \sin^2(\frac{ak_x}{2} + \frac{\pi l}{N}) - (\frac{ak_s}{2})^2]U_{\vec{k}}(l) + \frac{1}{N}(\frac{c_f^2}{c_s^2} - 1)\sin^2(\frac{ak_z}{2})\sum_{s'=0}^{N-1}U_{\vec{k}}(s') = 0, \quad (4.14)$$

avec  $k_s = \omega/c_s$  le nombre d'onde d'une onde basse fréquence pour le système homogène sans plan de force. Le paramètre  $P = \frac{1}{N}(\frac{c_f^2}{c_s^2} - 1)$ , adimensionné, est caractéristique de l'inhomogénéité et son influence diminue lorsque

- $c_f = c_s$ , donc pour des raideurs identiques,
- $N \gg 1$ , équivalent à  $D \gg a$ , ce qui traduit un éloignement trop important entre deux plans de force consécutifs.

A l'aide des paramètres introduits  $P$  et  $k_s$ , et en adimensionnant les nombres d'ondes  $k_x$ ,  $k_z$  et  $k_s$  par le nombre d'onde maximum de la première zone de Brillouin  $k_{max} = \frac{\pi}{a}$ , l'équation (4.14) s'écrit

$$[\sin^2(\frac{\pi k_z}{2}) + \sin^2(\frac{\pi k_x}{2} + \frac{\pi l}{N}) - (\frac{\pi k_s}{2})^2]U_{\vec{k}}(l) + P\sin^2(\frac{\pi k_z}{2})\sum_{s'=0}^{N-1}U_{\vec{k}}(s') = 0. \quad (4.15)$$

C'est un système linéaire de  $N$  équations à  $N$  inconnues sur les amplitudes spectrales  $U_{\vec{k}}(l)$ . La relation de dispersion du système  $\omega = \omega(k_x, k_z, P)$  s'obtient en écrivant que le déterminant du système (4.15) est nul. Pour une résolution numérique de ce système, le problème aux valeurs propres correspondant est défini par

$$[\mathbf{D}(k_x, k_z, P) - (\frac{\pi k_s}{2})^2]U_{\vec{k}} = 0, \quad (4.16)$$

avec  $\mathbf{D}(k_x, k_z, P)$  la matrice dynamique du système. Cette équation matricielle est à résoudre pour chaque pulsation  $\omega$  (comprise dans le paramètre  $k_s = \omega/c_s$ ), chaque vecteur d'onde  $(k_x, k_z)$  appartenant au contour de la première zone de Brillouin, et chaque paramètre d'inhomogénéité  $P$ . Puisque la géométrie du modèle est discrète, la description analytique de la relation de dispersion peut alors être obtenue sans troncation du système (4.15). Ceci diffère des études traditionnelles dans les matériaux composites périodiques où le caractère discret au niveau microscopique n'est pas pris en compte, ce qui se traduit par un système infini d'équations pour l'amplitude spectrale des modes [48, 21].

Avant l'étude du système inhomogène, les résultats obtenus dans le cas homogène sont retrouvés pour valider notre approche. Pour cela, une onde se propageant le long des plans de force dans la direction  $z$  ( $k_x = 0$ ) en l'absence de plans de force, c'est-à-dire dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , ou  $P = 0$ . Dans ce cas, le système (4.15) devient

$$[\sin^2(\frac{\pi k_z}{2}) + \sin^2(\frac{\pi l}{N}) - (\frac{\pi k_s}{2})^2]U_{\vec{k}}(l) = 0 \quad \forall l \in [0, N-1] \quad (4.17)$$

Le mode fondamental homogène ( $l = 0$ ) vérifie donc la condition

$$\sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right) - \left(\frac{\pi k_s}{2}\right)^2 = 0, \quad (4.18)$$

qui est la relation classique de dispersion pour une chaîne de billes 1D,

$$k_s = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi k_z}{2}\right). \quad (4.19)$$

Dans la limite basse fréquence  $k_z \rightarrow 0$ , l'introduction de la vitesse de l'onde transverse basse fréquence  $c_s$ , définie par

$$k_z = \frac{\omega}{c_s}, \quad (4.20)$$

est validée. La résolution numérique du système (4.15) pour  $P \rightarrow 0$  permet d'obtenir la déformée du premier mode de vibration du réseau. Dans le cas d'une onde se propageant le long des plans de force ( $k_x = 0$ ) et pour  $N = 5$  cylindres par maille du réseau, le mode plan homogène est retrouvé (voir la figure 4.2.3).

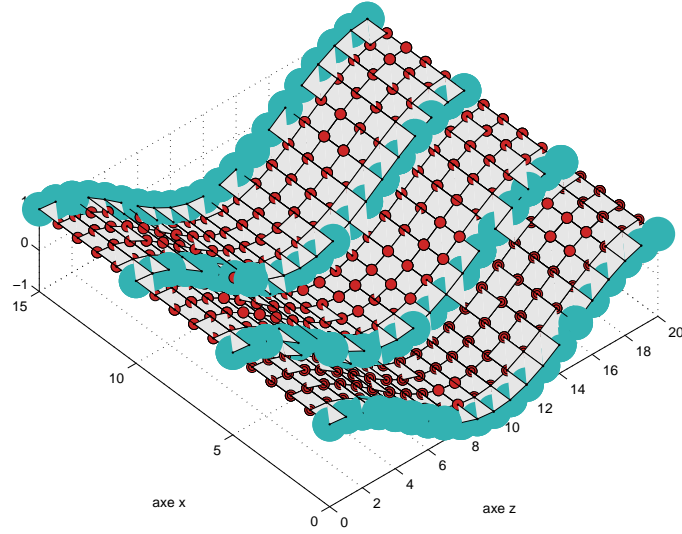


FIG. 4.6 – Déformée du mode fondamental de vibration du réseau sans plan de force avec  $N = 5$ . Les plans de force du système sont représentés en bleu.

Il est aussi intéressant d'étudier le cas d'une onde se propageant perpendiculairement aux plans de force, avec  $k_z = 0$ . Dans ce cas, l'équation (4.15), même en présence de plans de force, devient

$$\left[\sin^2\left(\frac{\pi k_x}{2} + \frac{\pi l}{N}\right) - \left(\frac{\pi k_s}{2}\right)^2\right] U_{\vec{k}}(l) = 0. \quad (4.21)$$

En introduisant la notation  $k'_x = k_x + \frac{2l}{N}$ , une solution de l'équation précédente est

$$k_s = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi k'_x}{2}\right), \quad (4.22)$$

qui correspond à la relation classique d'une chaîne de billes 1D, mais ici en présence de plans de force  $P \neq 0$ . Par conséquent, les plans de force n'influencent pas la propagation d'une onde transverse perpendiculaire aux plans, alors même que la modulation est suivant la direction  $(Ox)$ . En effet, seules les composantes horizontales (suivant  $(Ox)$ ) des raideurs de contact entre cylindres interviennent dans la propagation d'une onde transverse de nombre d'onde  $(k_x, k_z = 0)$ . Cependant, ces raideurs ne sont pas modulées. Un seul mode (le mode uniforme  $l = 0$ ) se propage dans ce cas, identique à celui du système homogène sans plan de force. Le champ de déplacement associé à cette onde n'est pas décomposable sur les modes du système. Il devient donc inutile par la suite d'étudier les courbes de dispersion sur le contour  $\Gamma X$  (correspondant à un nombre d'onde  $(k_x, k_z = 0)$ ) puisque les modes obtenus sont invariants avec le paramètre d'inhomogénéité  $P$ . Un nouveau contour de la première zone de Brillouin est défini pour cette étude, avec le chemin  $\Gamma Y M$  (voir la figure 4.7).

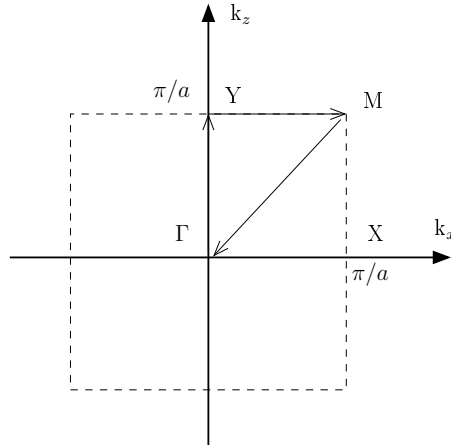


FIG. 4.7 – Première zone de Brillouin et description du contour  $\Gamma Y M$  suivi pour obtenir les courbes de dispersion.

#### 4.2.4 Calcul du déterminant de la matrice dynamique

La matrice dynamique  $\mathbf{D} - \frac{\pi k_s^2}{2} \mathbf{I}$  est une matrice Hermitienne (réelle et symétrique) dont les valeurs propres sont réelles. Pour simplifier son écriture, les notations suivantes sont introduites

$$\begin{aligned} s_z &= \sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right), \\ s_{xi} &= \sin^2\left(\frac{\pi k_x}{2} + \frac{\pi(i-1)}{N}\right), \\ W &= \frac{\pi k_s}{2}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Pour résoudre le problème de dispersion, il faut obtenir les valeurs propres de la matrice dynamique



$\mathbf{D} - \mathbf{W}^2 \mathbf{I}$  où la matrice  $\mathbf{D}$  s'écrit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} (P+1)s_z^2 + s_{x1} & Ps_z^2 & \dots & \dots & Ps_z^2 \\ Ps_z^2 & (P+1)s_z^2 + s_{x2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & (P+1)s_z^2 + s_{xN-1} & Ps_z^2 \\ Ps_z^2 & \dots & \dots & Ps_z^2 & (P+1)s_z^2 + s_{xN} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant à calculer est celui d'une matrice  $\mathbf{M}_{\mathbf{a}}$  de la forme

$$\mathbf{M}_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} r_1 & a & \dots & \dots & a \\ a & r_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & r_{N-1} & a \\ a & \dots & \dots & a & r_N \end{pmatrix},$$

avec  $a$  un scalaire et  $(r_1, r_2, \dots, r_N) \in \mathbf{R}^n$ . Son déterminant vaut (voir la démonstration dans l'annexe A)

$$\det(\mathbf{M}_{\mathbf{a}}) = p(a) - ap'(a), \quad (4.24)$$

où

$$p(x) = \prod_{i=1}^N (r_i - x),$$

est un polynôme de degré  $N$ .

La matrice dynamique  $\mathbf{D} - \mathbf{W}^2 \mathbf{I}$  du système non-homogène de dispersion est identifiée à la matrice  $\mathbf{M}_{\mathbf{a}}$  par,

$$\forall i \in [1, N], \quad r_i = (P+1)s_z^2 + s_{xi}^2 - W^2, \quad (4.25)$$

$$a = Ps_z^2, \quad (4.26)$$

en conservant les notations (4.23). L'équation (4.24) permet d'obtenir le déterminant exact du système aux valeurs propres à résoudre

$$\det(\mathbf{D} - \mathbf{W}^2 \mathbf{I}) = p(Ps_z^2) - Ps_z^2 p'(Ps_z^2), \quad (4.27)$$

avec

$$p(x) = \prod_{i=1}^N [(P+1)s_z^2 + s_{xi}^2 - W^2 - x]. \quad (4.28)$$

Pour la valeur  $x = Ps_z^2$ , le polynôme se simplifie en  $\prod_{i=1}^N [s_z^2 + s_{xi}^2 - W^2]$  et devient indépendant du paramètre d'inhomogénéité  $P$ . Le déterminant  $\det(\mathbf{D} - \mathbf{W}^2 \mathbf{I})$  s'écrit alors comme une somme de deux produits,

$$\det(\mathbf{D} - \mathbf{W}^2 \mathbf{I}) = \underbrace{\prod_{i=1}^N [s_z^2 + s_{xi}^2 - W^2]}_{\text{Déterminant du système homogène}} - \underbrace{Ps_z^2 p'(Ps_z^2)}_{\text{Terme de perturbation}}. \quad (4.29)$$

Le premier terme, indépendant de  $P$ , fournit les valeurs propres du système homogène (lorsque  $P = 0$ ), et le deuxième produit contient les termes de perturbations des valeurs propres par la modulation additionnelle.

Le calcul de la dérivée de  $p(x) = \prod_{i=1}^N [x_i - x]$ ,

$$p'(x) = -p(x) \sum_{i=1}^N (x_i - x)^{-1}, \quad (4.30)$$

permet d'écrire l'expression du déterminant du système non homogène,

$$\det(\mathbf{D} - \mathbf{W}^2 \mathbf{I}) = \prod_{i=1}^N [s_z^2 + s_{xi}^2 - W^2] + P s_z^2 \prod_{i=1}^N [s_z^2 + s_{xi}^2 - W^2] \sum_{j=1}^N (s_z^2 + s_{xj}^2 - W^2)^{-1}, \quad (4.31)$$

dont il faut calculer les racines  $W^2$ .

Dans cette partie, un système granulaire cubique simple est considéré pour la propagation d'ondes transverses en présence d'inhomogénéités périodiques (les plans de force). La mise en équation du problème a permis l'obtention de la relation de dispersion du système inhomogène. Cette relation est introduite sous la forme d'un système linéaire à  $N$  équations à  $N$  inconnues pour la description analytique, ou sous forme d'un problème matriciel pour la résolution numérique. Cette relation de dispersion fait apparaître  $N$  modes de vibrations pour les ondes transverses. Dans un premier temps, la simplification de la relation de dispersion au cas homogène (en l'absence de plans de force) a permis de retrouver les caractéristiques classiques de la propagation d'ondes dans un système discret périodique homogène. Par exemple, aux basses fréquences le mode fondamental de propagation est plan et homogène, et aux plus hautes fréquences, le phénomène de dispersion de vitesse est observé. Avant de décrire la résolution numérique pour le système inhomogène dans un cas général où le nombre de cylindres  $N$  est quelconque, des cas limites sont étudiés analytiquement pour introduire l'effet de la modulation des paramètres élastiques par les plans de force. Les deux cas limites sont  $N = 2$  cylindres par maille du réseau, et la présence d'une seule chaîne de force dans le système, correspondant à  $N \rightarrow \infty$ .

### 4.3 Résolution analytique pour des cas particuliers

Deux cas limites sont étudiés analytiquement de par leur structure simplifiée. D'abord, une alternance de plans de force et de plans de cylindres non chargés (ce qui correspond à  $N = 2$ ), formant un matériau granulaire "bicouche" avec modulation de rigidité, est analysée. Ensuite, le cas limite d'un seul plan de force (c'est-à-dire  $N \rightarrow \infty$ ) permet la description du profil des ondes propagatives le long du plan de force et évanescentes dans la direction perpendiculaire au plan de force.

#### 4.3.1 Développements asymptotiques pour $N = 2$

Lorsque le système est une alternance de plans de force et de plans souples, pour  $N = 2$  et par conséquent deux modes contribuant (soit  $l = 0, 1$ ), le système (4.15) sur les amplitudes spectrales devient en utilisant les notations (4.23)

$$\begin{aligned}(s_z^2 + s_x^2 - W^2)U_k(0) + Ps_z^2[U_k(0) + U_k(1)] &= 0, \\ (s_z^2 + c_x^2 - W^2)U_k(1) + Ps_z^2[U_k(0) + U_k(1)] &= 0.\end{aligned}$$

Les pulsations autorisées à se propager dans le système sont obtenues par annulation du déterminant de la matrice dynamique  $\mathbf{D} - \mathbf{W}^2\mathbf{I}$  du système,

$$\det(\mathbf{D} - \mathbf{W}^2\mathbf{I}) = W^4 - W^2[1 + 2(1 + P)s_z^2] + (1 + 2P)s_z^4 + (1 + P)s_z^2 + \frac{1}{8}[1 - \cos(2\pi k_x)], \quad (4.32)$$

dont les solutions pour une propagation le long des plans de force ( $k_x = 0$ ) s'écrivent

$$\omega_{0/1}^2 = \frac{1}{2}(1 + 2(1 + P)s_z^2) \pm \sqrt{1 + 4P^2s_z^4}. \quad (4.33)$$

Lorsque le paramètre d'inhomogénéité  $P$  est nul, le mode fondamental est celui de la propagation d'onde dans le système homogène,  $\omega_0^2 = s_z^2$ , et le second mode se propage à la pulsation  $\omega_1^2 = 1 + s_z^2$ . Pour  $k_z = 0$  et  $k_z = \pi/a$ , les deux modes se propagent à la même pulsation (voir la figure 4.8(a)). Cet effet est relié au guidage des phonons suivant l'axe ( $Oz$ ), qui en absence de modulation, se propagent à des angles identiques avec l'axe ( $Oz$ ).

Dans la limite  $P \rightarrow \infty$  (et par conséquent  $Ps_z^2 \gg 1$ ), la pulsation du mode fondamental devient

$$\omega_0^2 \rightarrow s_z^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = s_z^2 + \frac{1}{2}. \quad (4.34)$$

Ceci correspond à un mode guidé entre deux plans rigides, avec un déplacement nul dans les plans de force. Ce mode se propage alors avec une vitesse de groupe inférieure à celle du mode plan homogène lorsque  $P \rightarrow 0$ . Cette transition d'un mode plan homogène vers un mode guidé sera plus largement illustrée dans la section (1.3) avec l'étude numérique du cas général  $N$  quelconque. Pour le second mode, la pulsation tend vers la limite

$$\omega_1^2 \rightarrow (1 + 2P)s_z^2, \quad (4.35)$$

et le mode se propage à la vitesse  $c_f = c_s\sqrt{1 + 2P}$  correspondant à celle des plans de force.

Le choix d'un matériau bicouche permet aussi, par sa simplicité, d'introduire l'effet d'une anisotropie additionnelle du système granulaire considéré. Pour cela, les raideurs horizontales et verticales sont supposées différentes, c'est-à-dire  $\alpha_x \neq \alpha_z$  et  $\alpha_z^f = \alpha_z^s = \alpha_z$  (pas de plans de force pour le moment). Dans ce cas, la relation de dispersion des ondes transverses est donnée par l'équation (4.3). Les ondes le long de l'axe ( $Oz$ ) sont propagatives jusqu'à la pulsation  $\omega_z = 2\sqrt{\alpha_z/M}$ , avant la bande interdite pour cette direction de propagation. La pulsation maximale,  $\omega_{max} = \omega_z \sqrt{1 + \alpha_x/\alpha_z}$ , du cristal considéré est obtenu pour des nombres d'onde  $k_x = k_z = \pi/a$  (au bord de la zone de Brillouin). Avec l'introduction d'une faible modulation horizontale des raideurs, c'est-à-dire  $\alpha_z^f \rightarrow \alpha_z^s$ , le spectre des modes propagatifs selon l'axe ( $Oz$ ) du cristal est modifié de manière importante en

$$\omega_n^2 = \omega_z^2 \left[ \sin^2\left(\frac{ak_z}{2}\right) + \left(\frac{\alpha_x}{\alpha_z}\right) \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right], \quad (4.36)$$

avec  $n = 0, 1$ .

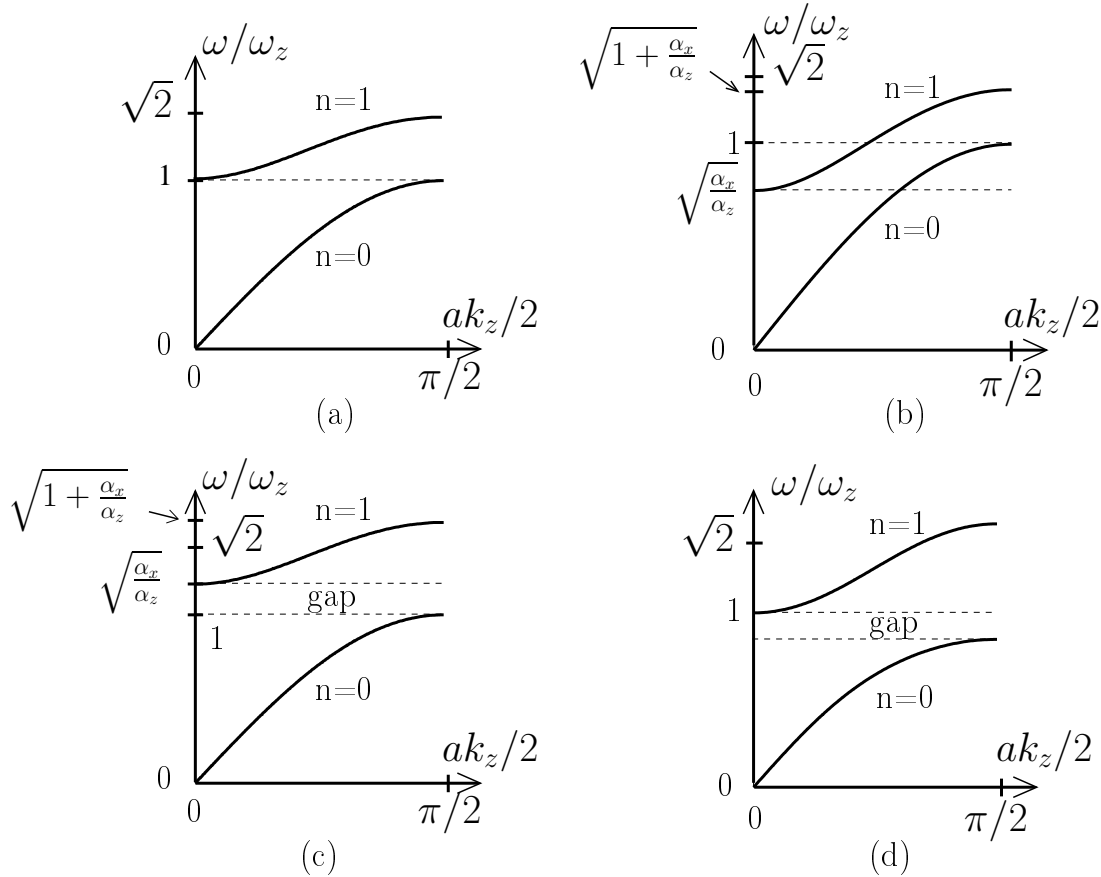


FIG. 4.8 – (a) Courbes de dispersion pour  $N = 2$  en l'absence de plans de force. (b)-(c) Influence de l'anisotropie additionnelle de chargement : (b) recouvrement pour  $\alpha_x \leq \alpha_z$  et (c) bande interdite pour  $\alpha_x \geq \alpha_z$ . (d) Ouverture d'un gap pour la propagation dans le cas d'un chargement vertical moyen modulé symétriquement.

Une fenêtre pour la propagation d'ondes suivant l'axe ( $Oz$ ) est ainsi accessible pour des pulsations  $\omega \geq \omega_z$  dans la bande de fréquence interdite de la structure initialement non modulée. Il y a recouvrement de modes (voir la figure 4.8(b)) dans le cas  $\alpha_x \leq \alpha_z$  sur la bande de fréquence  $\omega_z \sqrt{\frac{\alpha_x}{\alpha_z}} \leq \omega \leq \omega_z \sqrt{1 + \frac{\alpha_x}{\alpha_z}}$ . Dans le cas  $\alpha_x \geq \alpha_z$ , une bande de fréquence interdite (voir la figure 4.8(c)) apparaît entre les deux modes dans la fenêtre  $\omega_z \leq \omega \leq \omega_z \sqrt{\frac{\alpha_x}{\alpha_z}}$ . Avec l'augmentation du rapport  $\frac{\alpha_x}{\alpha_z}$  des raideurs, la plage fréquentielle du deuxième mode pénètre de plus en plus haut dans la bande de fréquence initialement interdite, avec une pulsation maximale égale à la pulsation maximale autorisée  $\omega_{max}$  dans le milieu non modulé. Le fait que cette fenêtre soit limitée par la pulsation  $\omega_{max}$  du milieu non modulé confirme que les effets observés résultent de la possibilité de guider les ondes hautes fréquences le long de l'axe ( $Oz$ ). Cette opportunité est créée par la périodicité additionnelle introduite le long de l'axe ( $Ox$ ).

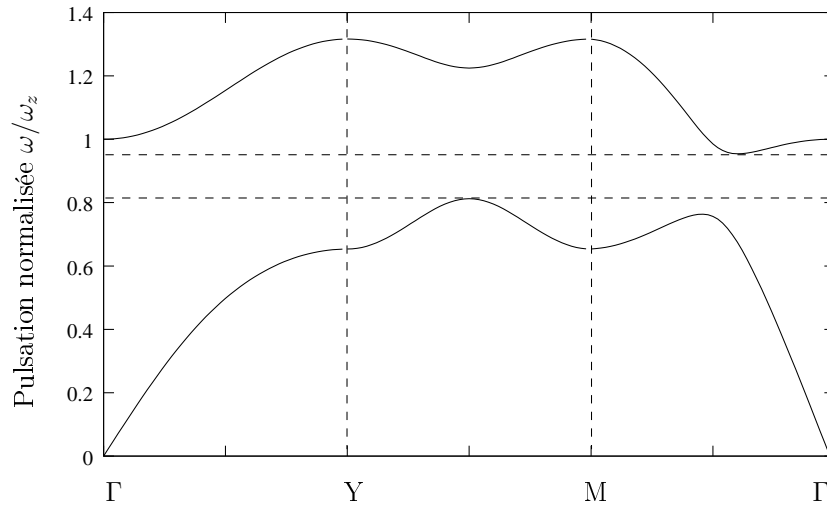


FIG. 4.9 – Apparition d'une bande interdite complète pour  $N = 2$  et  $\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} = 0.4$ .

La modulation horizontale des raideurs, en plus de l'anisotropie additionnelle du chargement (suivant les deux axes du cristal), influence de même les propriétés de dispersion du milieu en introduisant des bandes interdites pour la propagation. Ainsi, en considérant un chargement vertical moyen du système avec une raideur  $\alpha_z$ , et en modulant symétriquement les plans de cylindres par des raideurs  $\alpha_z^s = \alpha_z - \Delta\alpha$ ,  $\alpha_z^f = \alpha_z + \Delta\alpha$  et  $0 \leq \Delta\alpha \leq \alpha_z$ , les relations de dispersion des modes se propageant le long de l'axe  $z$  deviennent

$$\omega_{1,0}^2 = \omega_z^2 \left[ \frac{1}{2} + s_z^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha_z}\right)^2 s_z^4} \right]. \quad (4.37)$$

L'intérêt de la modulation symétrique des raideurs verticales autour du chargement moyen est l'ouverture d'une bande interdite pour les pulsations  $\omega_z \sqrt{3/2 - \sqrt{(1/2)^2 + (\Delta\alpha/\alpha_z)^2}} \leq \omega \leq \omega_z$  (voir la figure 4.8(d)), conduisant à une bande interdite complète pour la propagation d'ondes quelle que soit la polarisation d'ondes (voir la figure 4.9).

### 4.3.2 Etude du système avec un plan de force unique

Le système considéré est un assemblage cubique simple avec un plan de force unique localisé en  $m = 0$  (où  $m$  représente l'abscisse de chaque cylindre). La force exercée par chaque cylindre sur son voisin est une force de rappel comportant la raideur  $\alpha_z^s = \alpha_x$  excepté sur le plan  $m = 0$  où la raideur verticale vaut  $\alpha_z^f$ . La seule inhomogénéité considérée ici est la raideur verticale du plan de force. L'équation du mouvement générale associée au système s'écrit après simplification de l'équation du mouvement (4.15)

$$M \frac{\partial^2 U_{m,n}}{\partial t^2} = \alpha_z^s [U_{m,n+1} - 2U_{m,n} + U_{m,n-1} + U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}] + (\alpha_z^f - \alpha_z^s) [U_{m,n+1} - 2U_{m,n} + U_{m,n-1}] \delta_{m,0}. \quad (4.38)$$

L'équation (4.38) est décomposée suivant les régions d'influence du plan de force (voir la figure 4.10), les régions  $m = 0$  et  $m = \pm 1$ , ainsi que la région homogène définie par  $|m| \geq 2$ . Décrivons cette décomposition suivant les différentes régions d'influence du plan de force.

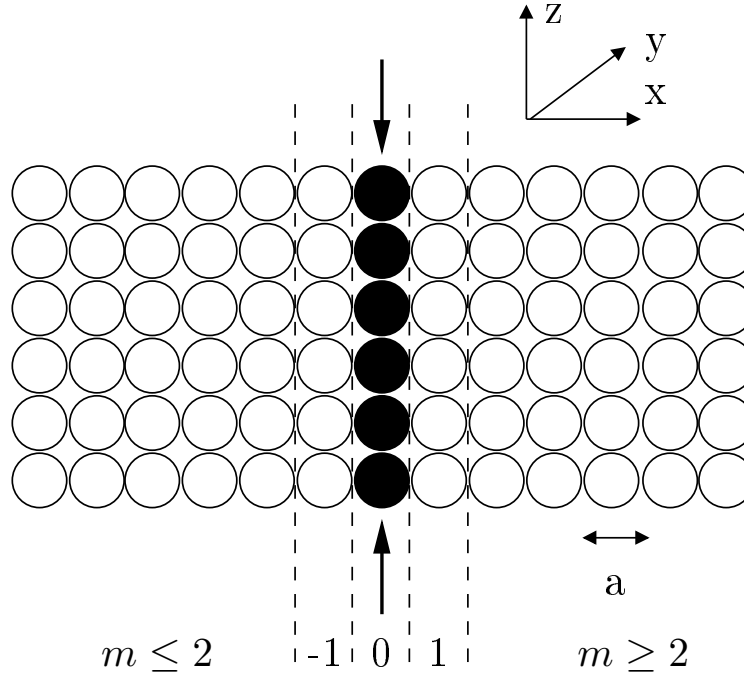


FIG. 4.10 – Géométrie du cas limite  $N \rightarrow \infty$  considéré. Illustration de la décomposition de l'influence du plan de force localisé en  $m = 0$ .

Pour  $|m| \geq 2$ , l'équation (4.38) prend la forme

$$M \frac{\partial^2 U_{m,n}}{\partial t^2} = \alpha_z^s [U_{m,n+1} - 2U_{m,n} + U_{m,n-1} + U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}]. \quad (4.39)$$

Les déplacements  $U_{0,n}$  des billes du plan de force n'interviennent pas dans cette équation. La solution générale de l'équation (4.39) pour ce milieu périodique homogène est alors de la forme

$U_{m,n} = Ae^{i(\omega t - k_x am - k_z an)}$ . Pour  $|m| \geq 2$ , la relation de dispersion (4.39) est obtenue

$$M\omega^2 = 4\alpha_z^s [\sin^2(\frac{ak_x}{2}) + \sin^2(\frac{ak_z}{2})]. \quad (4.40)$$

En introduisant les variables normalisées

$$W = \frac{2\omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha_z^s}}}, \quad k_x = \frac{ak_x}{\pi}, \quad k_z = \frac{ak_z}{\pi}, \quad (4.41)$$

la relation de dispersion pour le système homogène prend la forme

$$\sin^2(\frac{\pi k_x}{2}) + \sin^2(\frac{\pi k_z}{2}) = W^2. \quad (4.42)$$

Pour les plans de cylindres  $m = 1$  et  $m = -1$  entourant le plan de force localisé, l'équation du mouvement s'écrit

$$M \frac{\partial^2 U_{1,n}}{\partial t^2} = \alpha_z^s [U_{1,n+1} - 2U_{1,n} + U_{1,n-1} + U_{2,n} - 2U_{1,n} + U_{0,n}], \quad (4.43)$$

$$M \frac{\partial^2 U_{-1,n}}{\partial t^2} = \alpha_z^s [U_{-1,n+1} - 2U_{-1,n} + U_{-1,n-1} + U_{0,n} - 2U_{-1,n} + U_{-2,n}]. \quad (4.44)$$

Enfin l'équation régissant le déplacement du plan de force  $m = 0$  a la forme suivante

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2 U_{0,n}}{\partial t^2} &= \alpha_z^s [U_{0,n+1} - 2U_{0,n} + U_{0,n-1} + U_{1,n} - 2U_{0,n} + U_{-1,n}] \\ &\quad + (\alpha_z^f - \alpha_z^s) [U_{0,n+1} - 2U_{0,n} + U_{0,n-1}], \end{aligned} \quad (4.45)$$

dont une solution particulière est écrite sous la forme  $U_{0,n} = Be^{i(\omega t - k_z an)}$ .

Dans cette section, seuls les modes se propageant dans la direction des  $z$  croissants sont considérés. Ces modes peuvent être séparés en des modes symétriques et antisymétriques relativement au plan  $m = 0$ , plan de symétrie du système. Il est alors possible de montrer que l'existence de modes antisymétriques ( $U_{m,n} = -U_{-m,n}$ ) implique un déplacement nul dans le système et qu'ainsi seuls les modes symétriques ( $U_{m,n} = U_{-m,n}$ ) sont à considérer. L'équation (4.45) devient alors

$$M \frac{\partial^2 U_{0,n}}{\partial t^2} = \alpha_z^f [U_{0,n+1} - 2U_{0,n} + U_{0,n-1}] + 2\alpha_z^s [U_{1,n} - U_{0,n}]. \quad (4.46)$$

Pour ces modes symétriques, les équations (4.43) et (4.44) sont équivalentes. En substituant les champs de déplacements  $U_{m,n} = Ae^{i(\omega t - k_x am - k_z an)}$  et  $U_{0,n} = Be^{i(\omega t - k_z an)}$  dans l'équation (4.46) et dans chacune des équations (4.43) et (4.44), et en utilisant les variables normalisées (4.41), la relation de dispersion pour le système comprenant l'inhomogénéité est obtenue

$$\sin^2(\frac{\pi k_x}{2}) + \frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} \sin^2(\frac{\pi k_z}{2}) + i \sin(\frac{\pi k_x}{2}) \cos(\frac{\pi k_x}{2}) = W^2. \quad (4.47)$$

Les équations (4.42) et (4.47) forment alors un système d'équations

$$\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} \sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi k_x}{2}\right) = W^2 - i \sin\left(\frac{\pi k_x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi k_x}{2}\right), \quad (4.48)$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi k_x}{2}\right) = W^2, \quad (4.49)$$

dont les solutions  $k_z = k_z(W)$  et  $k_x = k_x(W)$  sont à obtenir pour décrire les ondes propagatives et évanescentes dans la direction des  $z$  croissants.

Le comportement des ondes se propageant dans le système peut être initialement prédit en prenant la différence des équations du système précédent

$$\left(\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} - 1\right) \sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right) = -\frac{i}{2} \sin(\pi k_x). \quad (4.50)$$

Une solution réelle pure et positive (pour une onde se propageant dans le sens des  $z$  croissants) est recherchée pour le nombre d'onde  $k_z$  afin d'obtenir la structure de modes strictement propagatifs selon l'axe ( $Oz$ ). La condition associée est alors

$$0 \leq \sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right) \leq 1 \quad \text{pour } k_z \in [0, 1]. \quad (4.51)$$

Une partie complexe (évanescence) est associée à l'onde suivant la direction ( $Ox$ ),  $k_x = k'_x + i k''_x$ , et après développement de  $\sin(\pi k_x)$  sur les fonctions trigonométriques, l'équation (4.50) devient, en séparant les parties réelles et imaginaires

$$\sin(\pi k'_x) \cosh(\pi k''_x) = 0, \quad (4.52)$$

$$2\left(\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} - 1\right) \sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right) = \cos(\pi k'_x) \sinh(\pi k''_x). \quad (4.53)$$

Les deux solutions possibles vérifiant l'équation (4.52),  $k'_x = 0$  et  $k'_x = 1$ , sont reportées dans l'équation (4.53) et dans chacune des équations (4.48) et (4.49) pour décrire la propagation d'ondes dans cette géométrie particulière.

#### 4.3.2.1 Cas $k'_x = 0$

L'onde est alors purement évanescente suivant l'axe ( $Ox$ ) et purement propagative selon l'axe ( $Oz$ ). La résolution de l'équation (4.53) permet d'obtenir le nombre d'onde complexe  $k''_x$ ,

$$\pi k''_x = \left[2\left(\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} - 1\right) \sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right)\right]. \quad (4.54)$$

Le signe de  $k''_x$  est donné par le signe de  $\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} - 1$ . Une solution physique (non divergente) est obtenue pour la condition  $\alpha_z^f \leq \alpha_z^s$ . Dans ce cas, la partie complexe du nombre d'onde selon l'axe ( $Ox$ ) est négative et l'onde est localisée autour du plan de force  $m = 0$ . Le plan de force est moins rigide (plus souple) que le milieu environnant et la structure spatiale du mode associé est décrite par (voir la figure 4.11(a))

$$U_{m,n} = A e^{i(\omega t - k_z \pi n)} e^{-\pi |k''_x m|}, \quad (4.55)$$



où  $k_x''$  est donné par l'équation (4.54). En considérant un chargement des cylindres de la forme  $\alpha_x = \alpha_z^s = \alpha_z$ ,  $\alpha_z^f = \alpha_z + \Delta\alpha$  et  $-\alpha_z \leq \Delta\alpha \leq \infty$ , la relation de dispersion du système (4.48) et (4.49) pour ce mode guidé par une seule chaîne de force est

$$\sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right) = \frac{1}{1-\delta} \left[ W^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{\delta(W^2 - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2(1-\delta)} \right], \quad (4.56)$$

avec  $\delta = \Delta\alpha/\alpha_z$ . Cette relation de dispersion décrit la propagation de modes avec une distribution transverse exponentielle, donnée par l'équation (4.55), pour une chaîne de force moins contrainte que le milieu environnant, dans le domaine basse fréquence  $0 \leq \omega \leq \omega_z \sqrt{3/2 - \sqrt{(1/2)^2 + \delta}}$ .

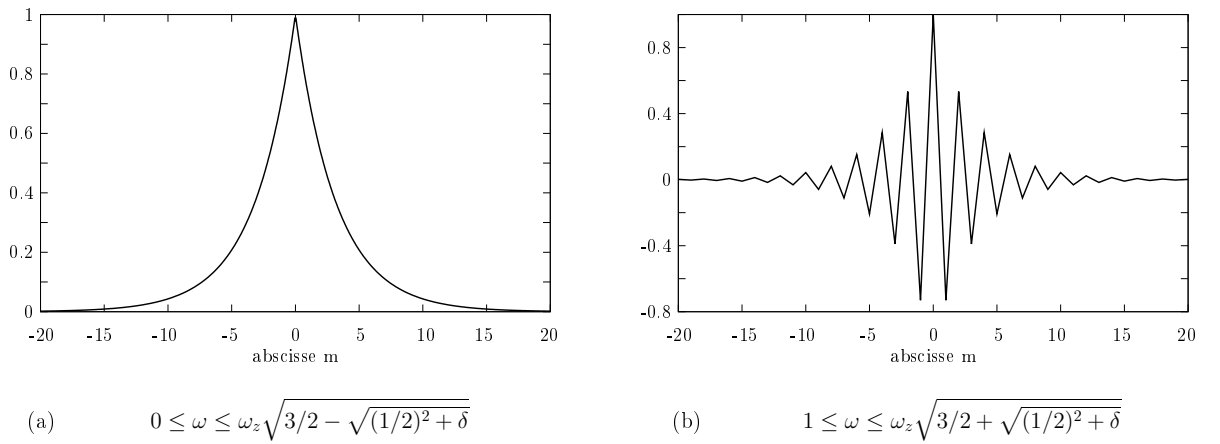


FIG. 4.11 – (a) Profil selon l'axe ( $Ox$ ) du mode localisé autour du plan  $m = 0$  dans le cas  $\alpha_z^f < \alpha_z^s$  et son domaine de pulsation associé. (b) Profil selon l'axe ( $Ox$ ) du mode localisé autour du plan  $m = 0$  dans le cas  $\alpha_z^f > \alpha_z^s$  et son domaine de pulsation associé.

#### 4.3.2.2 Cas $k_x' = 1$

Pour  $k_x' = 1$ , le nombre d'onde selon l'axe ( $Ox$ ),  $k_x = 1 + i k_x''$ , permet d'obtenir la partie complexe du nombre d'onde avec l'équation (4.53)

$$\pi k_x'' = -2 \left( \frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} - 1 \right) \sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right). \quad (4.57)$$

Le signe de  $k_x''$  est donné par le signe de  $-(\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} - 1)$  et la localisation est possible (solution non divergente) si  $\alpha_z^f \geq \alpha_z^s$ , c'est-à-dire un plan de force plus contraint que le milieu environnant. Dans ce cas, la structure spatiale du mode s'écrit

$$U_{m,n} = A e^{i(\omega t - k_z \pi n)} e^{-i\pi m} e^{-\pi |k_x'' m|}, \quad (4.58)$$

et sa distribution suivant l'axe ( $Ox$ ), représentée sur la figure 4.11(b),

$$U_m = e^{-i\pi m} e^{-\pi |k_x'' m|} = (-1)^m e^{-\pi |k_x'' m|}. \quad (4.59)$$

La relation de dispersion du système pour ce mode localisé par une seule chaîne de force est

$$\sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right) = \frac{1}{1-\delta}\left[W^2 - \frac{1}{2} - \sqrt{\delta\left(W^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2(1-\delta)}\right]. \quad (4.60)$$

Cette relation de dispersion décrit la propagation de modes avec une distribution transverse oscillante, donnée par l'équation (4.58), pour une chaîne de force plus contrainte que le milieu environnant, dans le domaine haute fréquence  $1 \leq \omega \leq \omega_z \sqrt{3/2 + \sqrt{(1/2)^2 + \delta}}$ .

En conclusion, il semble que les résultats analytiques obtenus dans le cas d'un plan de force localisé reproduisent correctement la physique des modes propagatifs et évanescent. Dans le cas d'un plan de force plus souple que le milieu environnant ( $\alpha_z^f \leq \alpha_z^s$ ), le mode propagatif voit sa vitesse diminuer et devient subsonique relativement au milieu environnant homogène. La propagation se fait sans émission d'ondes de volume (sans amortissement). Ce phénomène est bien connu dans les milieux continus, expliquant par exemple la génération d'ondes acoustiques transverses surfaciques (ondes de Love) dans des substrats rigides recouverts d'une fine couche de solide dont la vitesse des ondes transverses est plus faible [59]. Dans le cas d'un plan de force plus chargé que le milieu environnant ( $\alpha_z^f \geq \alpha_z^s$ ), dans le domaine haute fréquence ( $\omega > 1$ ), le mode propagatif le long du plan de force, décrit par la relation de dispersion (4.60), ne peut pas émettre d'ondes de volume dans le milieu. En effet, la pulsation associée à ce mode est supérieure à la pulsation de coupure du milieu homogène environnant. Ce mode est alors confiné au voisinage de la chaîne de force.

Ces deux cas limites, décrivant une géométrie particulière, ont permis d'aborder les phénomènes physiques (ouverture de fenêtres de pulsations pour les modes, localisation de modes) associés à la présence d'inhomogénéités dans un milieu initialement homogène. Le cas plus général de plans de force périodiques pour  $N$  quelconque est maintenant abordé.

## 4.4 Résultats numériques pour $N$ quelconque

Le système matriciel (4.16) est résolu numériquement sur le contour  $\Gamma Y M$  de la première zone de Brillouin pour un nombre  $N$  quelconque de cylindres. L'influence de la modulation périodique de raideurs le long des plans de force est étudiée en variant le rapport  $r = \frac{\alpha_f}{\alpha_z^s}$ , dans le cas  $\alpha_x = \alpha_z^s$ . Le nombre de modes de vibrations est égal au nombre de cylindres  $N$  de la cellule élémentaire. Ainsi, pour le cas limite  $N = 2$ , seuls deux modes de vibrations ont été analysés. Pour une meilleure lisibilité des courbes de dispersion, le choix est ici porté sur  $N = 4$  cylindres par maille du réseau. Sur les figures 4.12, 4.13, 4.14, les courbes de dispersion sont tracées pour des contrastes de raideurs croissants.

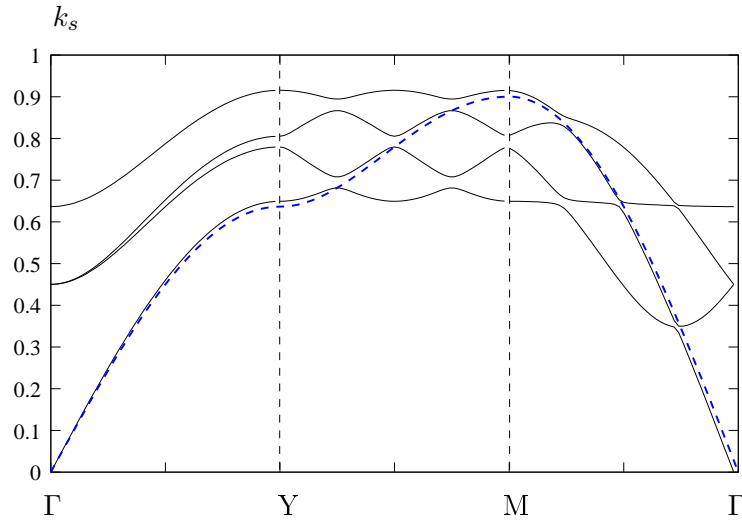


FIG. 4.12 – Courbes de dispersion pour  $N = 4$  cylindres par maille et un contraste  $r = 1.1$  des raideurs. La relation de dispersion du système homogène est tracée en tirets.

### 4.4.1 Premières observations

La première observation est qu'il existe des bandes de fréquences interdites entre les modes successifs sur le contour  $YM$ , c'est-à-dire pour  $k_z = 1$ . Ces bandes interdites sont dites partielles car elles n'existent pas pour toutes les directions de propagation. Avec l'augmentation du contraste de raideurs, ces bandes interdites s'élargissent jusqu'à ce que les courbes de dispersion deviennent constantes sur le contour considéré. Cet effet est clairement visible entre les figures 4.12 et 4.14. La vitesse de groupe de ces modes suivant l'axe  $(Ox)$  devient nulle et il est possible de montrer que l'onde est stationnaire entre deux plans chargés suivant l'axe  $(Ox)$  perpendiculaire aux plans de force.

Pour un faible contraste de raideur, les modes 2 et 3 sont dégénérés pour une propagation le long des plans de force (voir la figure 4.12). Pour un contraste de raideur nul,  $r = 0$ , les pulsations associées à ces deux modes sont égales. Avec l'augmentation du paramètre d'inhomogénéité  $P$  (proportionnel au contraste de raideur  $r$ ), la pulsation de l'onde associée au mode 3 augmente tandis que la pulsation du mode 2 est invariante. Cette observation ici faite dans le cas  $N = 4$  concerne l'ensemble des modes

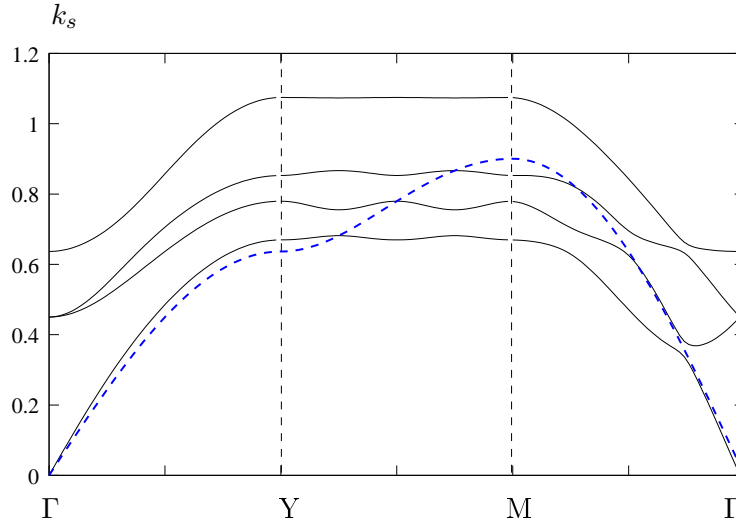


FIG. 4.13 – Courbes de dispersion pour  $N = 4$  cylindres par maille et un contraste  $r = 1.5$  des raideurs. La relation de dispersion du système homogène est tracée en tirets.

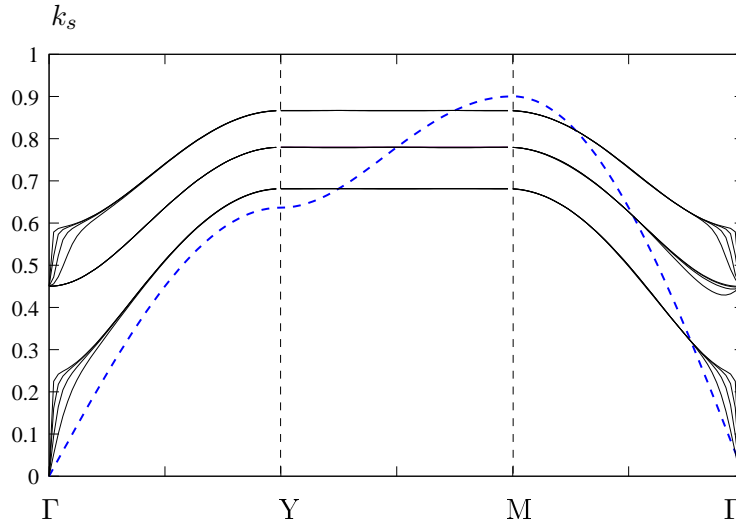


FIG. 4.14 – Trois premiers modes de propagation pour des contrastes croissants  $r = 5, 10, 20, 50$ . La relation de dispersion du système homogène est tracée en tirets.

acoustiques compris entre le premier mode de vibration et le mode acoustique de pulsation la plus élevée, quelque soit le nombre  $N$  de cylindres par maille. Il est clair d'après l'équation (4.31) que, pour le cas homogène, c'est-à-dire  $P = 0$ , le déterminant du système est un polynôme scindé (produit de monômes de degré 1) à  $N$  valeurs propres réelles données par

$$W_i^2 = \sin^2\left(\frac{\pi k_z}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi k_x}{2} + \frac{\pi(i-1)}{N}\right). \quad (4.61)$$

Pour une propagation le long des chaînes de force ( $k_x = 0$ ), les modes propres sont couplés par la

relation

$$\sin^2\left(\frac{\pi i}{N}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi(N-i)}{N}\right), \quad (4.62)$$

et le polynôme caractéristique du système est alors un polynôme scindé avec une racine d'ordre 1 (mode fondamental  $i = 1$ ) et

- $\frac{N-1}{2}$  racines d'ordre 2 pour  $N$  impair,
- $\frac{N}{2} - 1$  racines d'ordre 2 et une racine d'ordre 1 (mode  $N$ ) pour  $N$  pair.

Ces modes couplés correspondent à des vibrations transverses des cylindres déphasées d'un quart de longueur d'onde suivant l'axe ( $Ox$ ). Ces modes correspondent à un mode invariant avec le paramètre  $P$ , dont le déplacement est nul sur les plans de force, et un mode d'ordre supérieur, dont le déplacement est maximum au niveau des plans de force. La figure 4.15 présente le profil suivant l'axe ( $Ox$ ) des trois premiers modes de vibration du réseau. Seul le second mode est invariant avec le paramètre d'inhomogénéité  $P$ , puisque le déplacement au niveau des plans de force est nul. L'augmentation de la raideur verticale pour ce mode n'a alors aucune influence sur sa pulsation. Pour  $P = 0$ , la déformée selon l'axe ( $Ox$ ) du mode 3 montre un déplacement maximal au niveau des plans de force. Puisqu'une seule longueur d'onde selon l'axe ( $Ox$ ) est identifiée, la pulsation de ce mode est identique au mode 2, ce qui explique la dégénérescence observée. Avec l'augmentation du contraste de raideur, lorsque  $P \rightarrow \infty$ , le déplacement au niveau des plans de force s'annule. Par conséquent, la pulsation associée à ce mode tend vers celle d'un mode guidé. Ce phénomène, illustré sur la figure 4.15, sera analysé sur le comportement du mode fondamental ( $i = 1$ ) dans la section suivante.

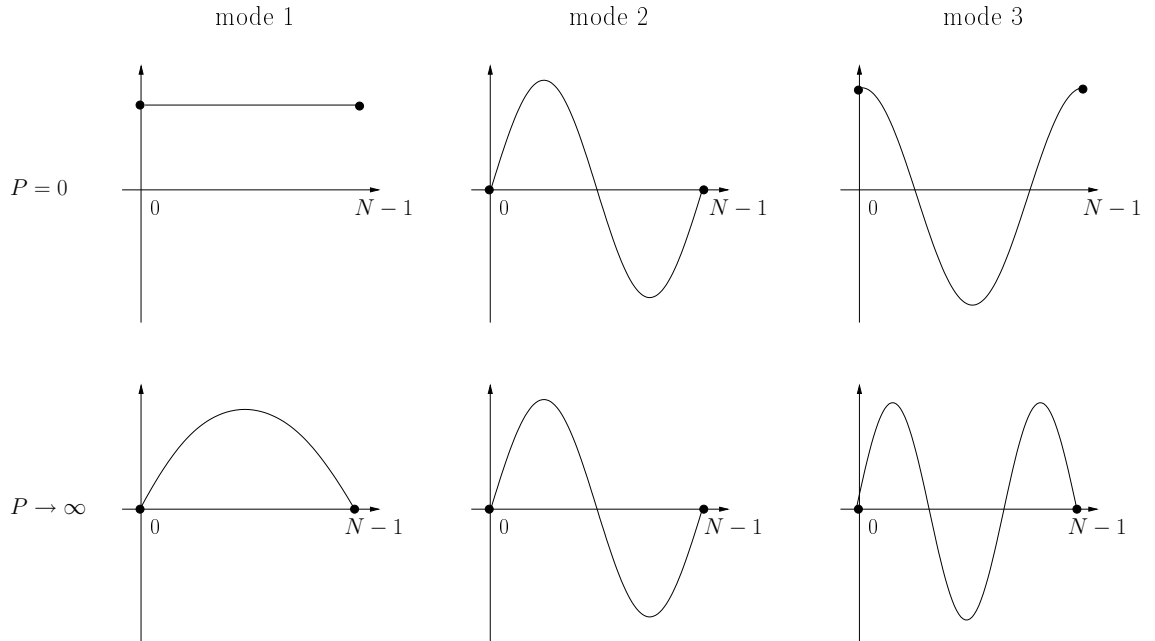


FIG. 4.15 – Profil selon l'axe ( $Ox$ ) des trois premiers modes de vibration. Illustration de l'invariance du mode 2 et de la transition des modes 1 et 3 vers un mode guidé.

Pour montrer l'invariance du mode 2 dans le cas  $N = 4$ , il suffit de montrer que la pulsation propre du mode 2 du système homogène est toujours une racine du polynôme caractéristique (4.31) quel que soit  $P$ . Dans le cas  $N$  quelconque, pour  $(W_2)^2 = \sin^2(\frac{\pi k_z}{2}) + \sin^2(\frac{\pi}{N})$ , le calcul se restreint à

$$\det(\mathbf{D} - (\mathbf{W}_2)^2 \mathbf{I}) = \prod_{i=1, i \neq 2}^N [\sin^2(\frac{\pi(i-1)}{N}) - \sin^2(\frac{\pi}{N})]. \quad (4.63)$$

Ce produit contient le terme  $i = N$  suivant,

$$\sin^2(\frac{\pi(i-1)}{N}) = \sin^2(\pi - \frac{\pi}{N}) = \sin^2(\frac{\pi}{N}), \quad (4.64)$$

qui annule le déterminant quel que soit  $P$ , et assure que  $W_2$  est une valeur propre du système non homogène pour tout  $P$ .

Ce calcul est ensuite étendu à l'ensemble des modes pairs. Mais un problème subsiste. En effet, cette méthode de vérification des racines connues du polynôme ne permet ni de donner l'ordre des racines, ni de vérifier qu'une des racines doubles est invariante (donc encore racine du polynôme) tandis que la racine dégénérée associée (pour  $P = 0$ ) est perturbée avec l'augmentation du paramètre d'inhomogénéité  $P$ .

#### 4.4.2 Comportement du premier mode de propagation

L'étude porte maintenant préférentiellement sur la propagation d'ondes le long des plans de force, visualisable sur la première partie des courbes de dispersion, pour  $k_x = 0$ . Le premier mode de vibration est identique au mode propagatif du système homogène pour de faibles contrastes de raideur. La valeur propre associée au mode basse fréquence est égale à celle du système homogène lorsque le paramètre d'inhomogénéité  $P$  est faible ( $P \ll 1$ ), et s'écrit

$$W_1^2 = \sin^2(\frac{\pi k_z}{2}). \quad (4.65)$$

Le système est dispersif lorsque  $k_z \rightarrow 1$ , c'est-à-dire pour une longueur d'onde de l'ordre du diamètre des billes. Avec l'augmentation du contraste de raideur, le comportement de la courbe de dispersion est d'abord perturbé aux petites longueurs d'onde (la perturbation sur la pulsation du premier mode en hautes fréquences est visible sur la figure 4.13). En effet, aux grandes longueurs d'onde, le milieu homogénéise les raideurs verticales du milieu lors de la propagation et une faible perturbation de raideur n'influence pas (ou peu) la moyenne des raideurs verticales. Cette perturbation devient visible aux basses fréquences avec l'augmentation du paramètre  $P$  (voir la figure 4.14). Puisqu'il est pour l'instant impossible d'obtenir la valeur propre exacte du mode fondamental perturbé par la modulation de raideur, seule une évaluation simpliste du décalage du premier zéro de l'équation (4.31), associé au mode fondamental, est analysée. Pour cela, le polynôme caractéristique du système de dispersion est calculé pour la valeur  $W_1^2$  (donnée par l'équation (4.65)),

$$f(W_1^2) = \underbrace{\prod_{i=1}^N [s_z^2 + s_{xi}^2 - W_1^2]}_{\rightarrow 0} + P s_z^2 \prod_{i=1}^N [s_z^2 + s_i^2 - W_1^2] \sum_{j=1}^N (s_z^2 + s_i^2 - W_1^2)^{-1}, \quad (4.66)$$

où le premier terme de l'équation (4.66) est nul (produit de facteurs dont un s'annule pour  $W_1^2$ ) et le deuxième terme se simplifie comme

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N [s_z^2 + s_i^2 - W_1^2] \sum_{j=1}^N (s_z^2 + s_j^2 - W_1^2)^{-1} &= \prod_{i=2}^N [\sin^2(\frac{\pi(i-1)}{N})], \\ &= \prod_{j=1}^{N-1} [\sin^2(\frac{\pi j}{N})], \\ &= 4^{1-N} N^2. \end{aligned} \quad (4.67)$$

La valeur du polynôme caractéristique pour la valeur  $W_1^2$  est obtenue,

$$f(W_1^2) = 4^{1-N} P N^2 \sin^2(\frac{\pi k_z}{2}). \quad (4.68)$$

Lorsque  $P = 0$ , le système n'est pas perturbé et la valeur  $W_1^2$  est toujours racine du polynôme. Il est maintenant possible de comparer l'action du paramètre d'inhomogénéité  $P$  pour deux cas de propagation d'ondes, une onde basse fréquence de nombre d'onde  $k_z = k_z^{BF}$  et une onde haute fréquence (proche de la fréquence de coupure)  $k_z = k_z^{HF}$ . En posant un petit paramètre  $\epsilon$  (avec  $\epsilon \ll 1$ ), chaque nombre d'onde devient :

- onde basse fréquence,  $k_z^{BF} \rightarrow 0$ , soit  $k_{zBF} = \epsilon$ ,
- onde haute fréquence,  $k_z^{HF} \rightarrow 1$ , soit  $k_{zBF} = 1 - \epsilon$ .

Un développement de Taylor de l'équation (4.68) pour les deux nombres d'ondes  $k_z^{BF}$  et  $k_z^{HF}$  permet de quantifier avec quelle rapidité (en fonction de  $P$ ) la modulation perturbe la valeur propre du premier mode. En basse fréquence,  $f(W_1^2) = C^{ste} P \sin^2(\frac{\pi \epsilon}{2}) \simeq C^{ste} P (\frac{\pi \epsilon}{2})^2$ . Le paramètre  $P$  doit donc être de l'ordre de  $(\frac{1}{k_z})^2$  pour jouer un rôle. Typiquement, pour  $k_z = 0.01$ ,  $P$  doit être de l'ordre de 10000 pour perturber la valeur propre de quelques pour cents de sa valeur initiale. En haute fréquence,  $f(W_1^2) = C^{ste} P \sin^2(\frac{\pi(1-\epsilon)}{2}) \simeq C^{ste} P (1 - \frac{\pi \epsilon}{2})^2$ , et une composante proportionnelle à  $P$  apparaît dans le décalage de la valeur propre.

#### 4.4.3 Transition vers un mode guidé

Le front d'onde du mode fondamental est initialement plan (voir la figure 4.11) pour le système homogène. Avec l'augmentation des raideurs verticales au niveau des plans de force, la résolution numérique a révélé la diminution du déplacement transverse des cylindres chargés.

Cet effet est visualisable sur les déformées selon l'axe ( $Ox$ ) du mode fondamental, évaluées pour des valeurs de contraste de raideurs croissantes (voir la figure 4.16). Ces déformées sont obtenues par transformée spatiale inverse du vecteur propre correspondant. Pour des raideurs  $\alpha_z^f$  trop élevées, les plans de force sont une rupture d'impédance importante avec le milieu élastique interstitiel et le mode tend vers un mode guidé stationnaire suivant l'axe perpendiculaire aux plans chargés (voir la figure 4.17).

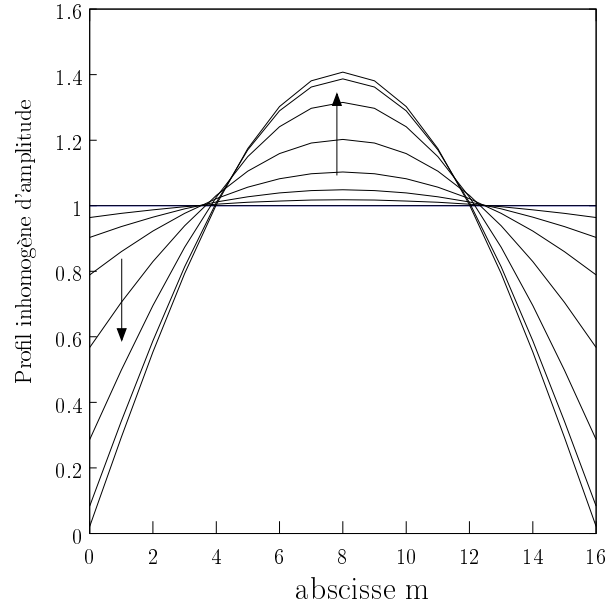


FIG. 4.16 – Evolution du profil inhomogène d'amplitude du mode fondamental se propageant le long des plans de force pour des contrastes de raideurs croissants. La résolution numérique est effectuée pour  $N = 16$  cylindres par maille élémentaire, le plan de force étant situé à l'origine  $m = 0$ .

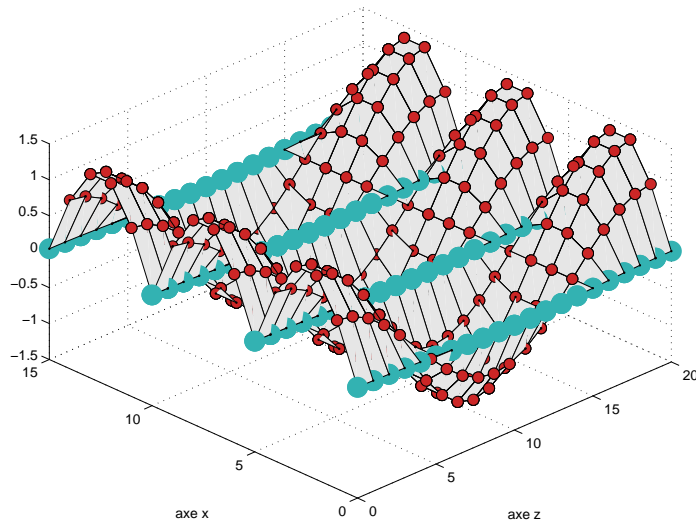


FIG. 4.17 – Déformée du premier mode de propagation du réseau pour un paramètre d'inhomogénéité  $P$  important. Avec la transition vers un mode guidé, le déplacement au niveau des plans de force s'annule. Trois mailles du réseau sont représentées.



L'évolution des propriétés de propagation des ondes se déduisent des variations de la vitesse de groupe de chaque mode, donc de la propagation de l'énergie de chaque mode. Dans un cristal à deux dimensions, la vitesse de groupe se calcule à partir de la relation  $\vec{v}_g = \text{grad}_{\vec{k}} \omega$ , avec  $v_g = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ , où  $v_x$  et  $v_z$  sont les projections du vecteur vitesse de groupe sur les vecteurs du réseau réciproque. Dans le cas de l'étude du mode fondamental se propageant le long des plans de force, le calcul numérique de la vitesse de groupe se limite au calcul de la composante  $v_z$  à partir de la dérivée des courbes  $\omega_k$  par rapport à la composante  $k_z$  de l'onde. L'évolution de la vitesse de groupe (normalisée par rapport à la vitesse des ondes transverses lentes  $c_s$ ) du premier mode de propagation, ainsi que son évolution avec le contraste de raideur, est présentée sur la figure 4.18.

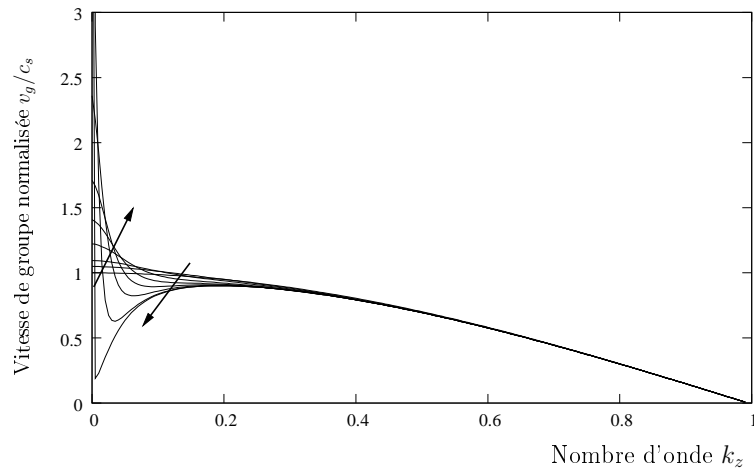


FIG. 4.18 – Evolution, avec le paramètre d'inhomogénéité  $P$ , de la vitesse de groupe du premier mode de vibration en fonction du nombre d'onde  $k_z$ .

Pour l'onde initialement homogène, dont la relation de dispersion est donnée par l'équation (4.65), la vitesse de groupe vaut

$$v_z^{(1)} = \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial k_z} = \frac{\pi}{2} \cos\left(\pi \frac{k_z}{2}\right), \quad (4.69)$$

qui tend vers  $\pi/2$  aux grandes longueurs d'onde, ce qui correspond à la vitesse des ondes transverses lentes  $c_s$ . Elle s'annule lorsque  $k_z \rightarrow 1$ , puisque le mode ne se propage plus. Avec l'augmentation du contraste de raideur, la vitesse selon l'axe  $(Oz)$  du premier mode, initialement monotone (décroissante), présente un minimum qui se décale vers les faibles nombres d'ondes  $k_z$ . A droite de ce minimum, l'onde de pulsation haute fréquence est perturbée par l'inhomogénéité de raideur. La courbe de vitesse de groupe tend vers celle d'un mode guidé dont la vitesse de groupe aux grandes longueurs d'ondes s'annule. A gauche de ce point d'inflexion, l'hypothèse de grande longueur d'onde est toujours valide et l'onde homogénéise le milieu (les raideurs verticales). Un modèle simple de la modulation de raideurs verticales (voir la figure 4.19) permet d'estimer la vitesse du premier mode de propagation aux grandes longueurs d'ondes. Sous l'hypothèse d'une elongation identique de tous les ressorts, la force de rappel totale du système vaut  $F = \sum F_i = \alpha_z^f \Delta U + (N-1)\alpha_z^s \Delta U$ , où  $\Delta U = U_2 - U_1$  est le déplacement

transverse relatif des cylindres. Pour  $N$  cylindres par maille du réseau, une proportion  $1/N$  est partagée par le plan de force pour  $1 - 1/N$  partagée par le milieu environnant homogène. La raideur verticale moyenne est alors

$$\alpha_m = \frac{1}{N}\alpha_z^f + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\alpha_z^s = \alpha_z^s(1 + P). \quad (4.70)$$

Ainsi, pour le mode fondamental, l'hypothèse de grande longueur d'onde est toujours valide. Le mode plan correspondant se propage alors avec la vitesse effective

$$v_{eff} = \frac{2}{\sqrt{M}}\sqrt{\alpha_m} = c_s\sqrt{1 + P}. \quad (4.71)$$

La dépendance de la vitesse effective (4.71), pour le premier mode de vibration, en puissance  $1/2$  du paramètre d'inhomogénéité  $P$  est à l'origine de l'augmentation de la vitesse de groupe de ce mode en basses fréquences (observée sur la figure 4.18). Ainsi, une homogénéisation des raideurs verticales du milieu permet de comprendre qualitativement l'influence du chargement des plans de force sur la propagation acoustique, ici sur le premier mode du réseau.

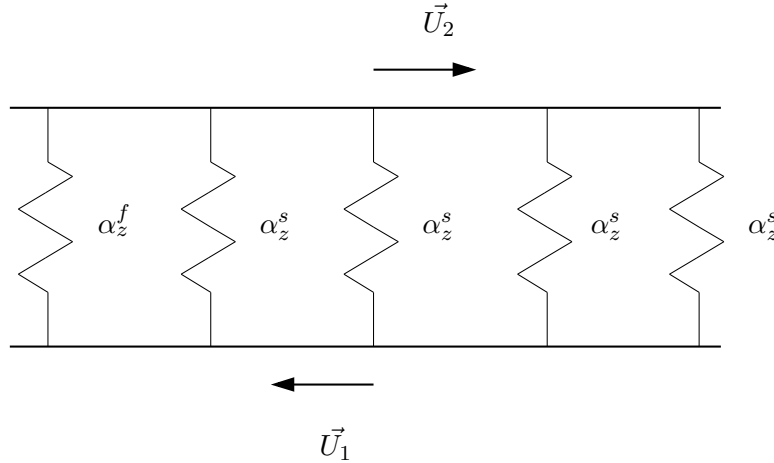


FIG. 4.19 – Représentation de la modulation des raideurs verticales.

Pour résumer, la résolution du problème de dispersion, pour le système inhomogène dans le cas  $N$  quelconque, permet de compléter la compréhension de la propagation d'ondes dans un réseau granulaire périodiquement chargés au niveau de plans de force. Il apparaît que tous les modes acoustiques ne sont pas sensibles aux plans de force du milieu. En effet, cette étude a permis de présenter des modes dont le profil est sinusoïdal entre deux plans chargés, avec un déplacement nul au niveau de ceux-ci. Ces modes se propagent ainsi préférentiellement entre les plans de force. Les autres modes de propagation du système sont particulièrement influencés par la présence de plans de force, caractérisés par le paramètre d'inhomogénéité  $P$ . L'accent est principalement mis dans cette partie sur le premier mode de propagation du réseau se propageant le long des plans de force. Lorsque le système est homogène (en l'absence de modulation de raideur), le premier mode de propagation est un mode plan

homogène. Même une infime perturbation de raideur au niveau des plans de force influence le profil de ce mode pour de petites longueurs d'ondes. Avec l'augmentation du contraste des raideurs entre les plans chargés et le milieu environnant, le mode initialement plan homogène présente une transition vers un mode guidé. Ce mode guidé est caractérisé par un déplacement nul au niveau des plans de force, mais aussi par une vitesse de groupe nulle lorsque le nombre d'onde tend vers zéro. Il existe cependant toujours une zone d'influence des plans de force, se décalant vers les plus basses fréquences à mesure que le paramètre d'inhomogénéité augmente. Aux basses fréquences, une homogénéisation des raideurs verticales du milieu a permis d'estimer l'évolution de la vitesse de groupe de ce mode, caractéristique de la zone d'influence des plans chargés en basses fréquences.

## 4.5 Estimations en vue d'une application expérimentale

Après l'obtention de solutions analytiques et de résultats numériques pour la propagation d'ondes dans le réseau granulaire idéal, il est possible d'imaginer la réalisation expérimentale d'un tel assemblage granulaire cubique en trois dimensions. Pour des cylindres, selon la théorie de Hertz, le comportement des contacts entre deux cylindres est moins non linéaire que des contacts entre sphères [41], dans l'hypothèse de petites déformations. Dans ce cas, les cylindres considérés pour le cas bidimensionnel sont remplacés par des sphères de rayon identique. En considérant des billes collées (pour éviter la rotation) suivant l'axe  $(Oy)$ , un chargement important des billes peut être appliqué tout en restant dans la validité des hypothèses de la théorie de Hertz. A défaut d'avoir réalisé cette expérience, il est intéressant d'estimer quel contraste de raideur entre les chaînes de force et les billes voisines 'spectatrices' est accessible expérimentalement. Pour cela, la rigidité transverse des contacts sera établie afin d'évaluer le contraste de raideur entre les billes fortement et faiblement chargées, sans atteindre la fracture des billes.

D'après la théorie de Hertz-Mindlin [41] décrite dans le chapitre 1, le déplacement relatif tangentiel entre deux sphères de rayon  $R$  soumises à une force normale  $F_N$  et tangentielle  $Q_T$  vaut

$$U^{(t)} = \frac{Q_T}{4a} \frac{2 - \nu}{G}, \quad (4.72)$$

avec  $a$  le rayon du contact,  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau et  $G$  le module de cisaillement valant  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  pour des solides isotropes. En introduisant la notation  $K = \frac{4}{3} \frac{E}{1-\nu^2}$  et en remplaçant le rayon de contact  $a$  par  $a = (\frac{2F_N R}{K})^{1/3}$ , la relation force tangentielle/déplacement tangentiel s'écrit

$$Q_T = \frac{3(1-\nu)}{2(2-\nu)} K^{2/3} (2F_N R)^{1/3} U^{(t)}, \quad (4.73)$$

et permet d'identifier la rigidité tangentielle des contacts  $\alpha_T$ ,

$$\alpha_T = \frac{3(1-\nu)}{2(2-\nu)} K^{2/3} (2F_N R)^{1/3}. \quad (4.74)$$

L'équation (4.74) est valide sous l'hypothèse de validité de la théorie de Hertz, c'est-à-dire un rayon du contact  $a = (\frac{2F_N R}{K})^{1/3}$  très inférieur au rayon  $R$  des billes afin d'assurer la condition de faibles

déformations ( $\frac{a}{R} \ll 1$ ). Cette condition permet d'obtenir la force normale maximale,  $F_N \ll KR^2$ , à appliquer à l'empilement. En accord avec l'équation (4.74), la rigidité transverse du contact est proportionnelle à la racine cubique de la force normale appliquée. Le rapport des rigidités  $\alpha_z^f/\alpha_z^s$ , entre les contacts forts et les 'spectateurs', est donc lui aussi proportionnel à la racine cubique de leur chargement,

$$(\alpha_z^f/\alpha_z^s) = (F_N^f/F_N^s)^{1/3}, \quad (4.75)$$

où les exposants  $f$  et  $s$  correspondent respectivement aux contacts forts et aux contacts faibles (ou souples). Il convient maintenant d'estimer l'obtention d'un contraste de rigidité important, caractérisé par le paramètre  $P = \frac{1}{N}(\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} - 1)$ . Pour cela, le chargement additionnel des contacts dans les chaînes de force relativement au chargement des billes 'spectatrices',  $\Delta F = F_N^f - F_N^s$ , est introduit. Pour obtenir un contraste important,  $\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} - 1 \geq 10$ , il est nécessaire d'appliquer des chargements  $\Delta F^f$  excédant significativement le chargement statique  $F_N^s$  des spectateurs, et dans ce cas,

$$\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} - 1 \sim \left(\frac{\Delta F}{F_N^s}\right)^{1/3}, \quad (4.76)$$

et la force minimum pour obtenir un contraste important est alors,

$$\Delta F^{min} \geq 10^3 F_N^s. \quad (4.77)$$

Un assemblage granulaire cubique (voir la figure 4.20) de dimension  $L^3$  et de  $M^3$  billes est maintenant considéré, avec  $M$  le nombre de billes par côté du cube. Une arête du cube vaut ainsi  $L = 2MR$ , où  $R$  est le rayon d'une bille. La force statique maximale entre billes est uniquement due à la gravité, donc à la hauteur de la colonne granulaire. Cette force est égale à  $F_{Nmax}^s = M * mg$ , où  $m = \frac{4}{3}\pi \rho R^3$  est la masse d'une bille, et  $g$  l'accélération de la gravité.

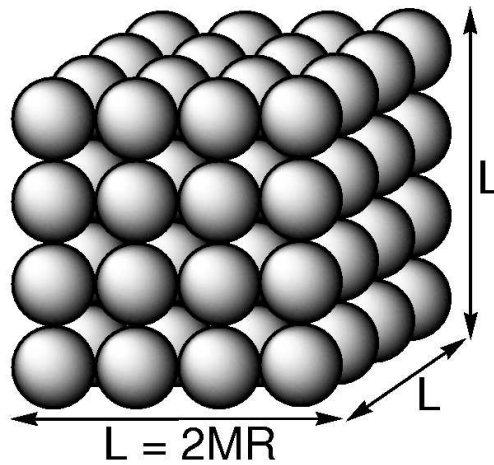


FIG. 4.20 – Assemblage granulaire cubique de volume  $L^3$ .

En reportant cette expression dans l'équation (4.77), la borne inférieure du chargement  $F_N^f$  des chaînes de force,

$$\Delta F^{min} \geq 10^3 F_N^s = 10^3 M \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g, \quad (4.78)$$

nécessaire à un contraste de rigidité  $\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s}$  important est obtenue. La limite supérieure du chargement des chaînes de force  $\Delta F^{max}$  peut pour sa part être calculée en vue d'éviter la fracture des billes sous l'effet du chargement. La contrainte entre deux billes étant localisées au niveau du contact, cette contrainte peut être estimée par  $\sigma_{contact} \simeq \frac{F_N^f}{\pi a^2}$ . La déformation associée vaut alors  $\varepsilon_{contact} \simeq \frac{F_N^f}{\pi a^2 E}$ , avec  $E$  le module d'Young du matériau. Pour éviter la fracture, une condition suffisante est de respecter le critère de non-destruction  $\varepsilon_{contact} \leq 0.1$ . Les estimations théoriques de la limite de fracture d'un cristal idéal sont basées sur l'estimation de la force d'attraction interatomique maximale [47]. La contrainte  $\sigma_f$  nécessaire à la fracture, menant à la destruction du matériau, est reliée au module d'Young par  $\sigma_f \simeq \frac{E}{10}$ . La déformation limite est ainsi estimée à  $\varepsilon_f \simeq \frac{1}{10}$ . Mais en réalité les déformations  $\varepsilon_f$  mesurées varient entre 0.2 pour des matériaux rigides et 0.4 pour des matériaux tels le caoutchouc. En conséquence, l'utilisation de  $\varepsilon \simeq \frac{1}{10}$  comme déformation maximale dans les estimations nous assure de l'absence de fracture dans des matériaux homogènes (comme les billes de verre). Sous cette condition, le chargement maximal vaut  $\Delta F^{max} \leq 0.1 \pi a^2 E$ , et après simplification du rayon de contact par la théorie de Hertz, le chargement appliqué est encadré par ces bornes inférieures et supérieures

$$10^3 M \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g \leq \Delta F \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 10^{-3} \pi^3 (1 - \nu^2)^2 (2R)^2 E. \quad (4.79)$$

Il ressort de cette inégalité la dimension maximale  $L_{max}$  du côté de l'assemblage granulaire, pour laquelle une forte modulation de raideur est possible sans atteindre la fracture,

$$L = 2MR \leq L_{max} = 10^{-4} \frac{(1 - \nu^2)^2 E}{\rho g}. \quad (4.80)$$

Cette longueur est estimée à 350 m pour un assemblage de billes de verre de caractéristiques  $\nu = 0.25$ ,  $E = 65 \text{ GPa}$  et  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ . Cette échelle est incontestablement accessible à l'expérience en laboratoire (c'est la longueur maximale du cube). Il s'ajoute à cette estimation la nécessité d'obtenir une forte modulation des rigidités  $\frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} \geq 10$ , et en reportant dans l'équation (4.75) les bornes obtenues dans (4.79), le rapport des raideurs s'écrit

$$10 \leq \frac{\alpha_z^f}{\alpha_z^s} \leq 10 \left( \frac{1}{5} \frac{L_{max}}{L} \right)^{1/3}. \quad (4.81)$$

Par conséquent, pour obtenir un contraste de rigidité de 100, la dimension du système  $L$  doit être telle que  $(\frac{1}{5} \frac{L_{max}}{L})^{1/3} \simeq 10$ , soit  $L \simeq 7 \text{ cm}$ . Cette estimation est la longueur du cube nécessaire pour obtenir un contraste important indépendamment du nombre de billes  $M$  et de leur rayon  $R$ .

Pour terminer, il reste à estimer le chargement à appliquer et la dimension du système lors de l'introduction d'une échelle spatiale différente de la taille des billes, celle des chaînes de force. La double périodicité due aux chaînes de force peut être considérée raisonnable pour  $N \simeq 10$ , où  $N$  est le nombre de billes entre les plans chargés. Pour considérer le système comme périodique, une

hypothèse valide est de considérer au moins 10 périodes, c'est-à-dire au moins  $M = 100$  billes par côté. Pour des billes de verre de rayon  $R = 1 \text{ mm}$ , utilisées par exemple dans le cadre expérimental de ce travail, la dimension du cube associée vaut alors  $L = 2MR = 0.2 \text{ m}$ . Le rapport des raideurs entre les chaînes de force et les billes spectatrices se situe entre 10 et 90 d'après l'encadrement (4.81). Ceci correspond à un chargement additionnel des chaînes de force par rapport au chargement des billes environnantes s'échelonnant entre 10  $N$  et 4  $kN$  d'après l'équation (4.79). Cette dernière estimation, accessible expérimentalement, permet d'espérer la vérification des principales caractéristiques étudiées de la propagation d'ondes dans un système granulaire cubique périodiquement chargé.

## 4.6 Conclusion

Un modèle qui décrit la propagation d'ondes dans un réseau granulaire cubique périodiquement chargé a été développé. Le chargement périodique entraîne une distribution spatiale simplifiée de chaînes de force, où les raideurs verticales entre contacts sont périodiquement modulées. La géométrie du modèle est bidimensionnelle, comprenant des cylindres infiniment longs. Pour une propagation d'ondes transverses normale à l'axe des cylindres, l'ensemble des modes de propagations du réseau sont pris en compte.

A travers l'étude de cas limites, les caractéristiques de la propagation d'ondes sont analysées. Pour  $N = 2$  cylindres par maille du réseau, l'influence de l'anisotropie additionnelle du chargement des cylindres est étudiée à travers les courbes de dispersion du système. Il est possible, pour une modulation symétrique des raideurs autour du chargement moyen, d'obtenir une bande interdite complète pour la propagation d'ondes, quelle que soit la direction de propagation d'ondes. Pour  $N \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire une seule chaîne de force, les solutions des équations du mouvement ont été analytiquement calculées. La relation de dispersion des modes propagatifs le long du plan de force et évanescents dans la direction normale au plan de force, ainsi que la structure spatiale de ces modes, sont obtenues en fonction du chargement du plan de force. La localisation de modes est obtenue autour du plan de force pour des pulsations inférieures à la pulsation de coupure du milieu homogène (lorsque le plan de force est plus souple que ce milieu) et pour des pulsations supérieures, où le mode ne peut émettre d'ondes de volume dans le milieu.

Pour un nombre de cylindres  $N$  quelconque par maille du réseau, les courbes de dispersion du système inhomogène sont obtenues par résolution numérique. Une famille de modes apparaît insensible à la présence de plans de force périodiques, avec un profil sinusoïdal entre deux plans chargés consécutifs. L'étude du premier mode de propagation du réseau a montré la possibilité de passer d'un mode initialement plan à un mode guidé inhomogène. Cette transition s'accompagne d'une modification de la vitesse de groupe de l'onde acoustique associée. Avec l'augmentation du contraste de raideur entre les contacts fortement et faiblement chargés, l'onde se propage alors préférentiellement entre les plans de force.

Cette approche théorique s'accompagne d'une estimation des différents paramètres du problème considéré afin d'appliquer expérimentalement cette étude. Les chargements des chaînes de force, dans

le cas de billes de verre identiques à celles utilisées dans les expériences de compaction, ont été calculés afin de créer un contraste de raideur important, sans atteindre la fracture des billes. Un rapport 100, entre les raideurs des chaînes de force et celles du milieu environnant, suffisant pour l'observation des phénomènes étudiés, est accessible pour un assemblage granulaire cubique d'arête 20 *cm*.

Enfin, il est intéressant de mentionner les problèmes auxquels cette étude peut être reliée. La modélisation proposée se rapproche des matériaux fragiles, comme les colloïdes, (voir la figure 1 de [13]), se réarrangeant sous l'effet d'une contrainte externe. Les particules les constituant forment alors des chaînes de force selon la direction de la contrainte et permettent au matériau de supporter indéfiniment la contrainte appliquée (l'état bloqué du colloïde est appelé 'jamming'). Cependant une faible variation du chargement crée des réarrangements des chaînes de force et le colloïde voit son état passer d'un état stable à un autre. Il existe aussi une forte relation entre ce problème et celui de la propagation d'ondes dans des composites élastiques périodiques, ou cristaux phononiques, structures dont les propriétés acoustiques révèlent des bandes de fréquences interdites reliées au contraste entre les paramètres élastiques du matériau [48, 21].





# Conclusion générale

Dans ce travail de thèse, différents aspects expérimentaux et théoriques de la propagation acoustique au sein de milieux granulaires non consolidés ont été étudiés. L'objectif premier de cette étude était la caractérisation de la compaction granulaire par des ondes acoustiques, et l'obtention d'informations, par l'utilisation des méthodes non linéaires, sur la distribution de contacts du milieu.

Après un premier chapitre introductif, le second chapitre présente le dispositif expérimental mis au point pour effectuer la compaction d'un assemblage de billes de verre. Un récipient contenant un matériau granulaire composé de billes de verre est soumis à des sollicitations discrètes dans la direction verticale. La variation relative de la compacité du milieu (le rapport du volume occupé par les billes sur le volume total) est obtenue par une mesure ultrasonore simple. Sous l'effet des sollicitations discrètes, le milieu initialement peu compact ( $\Phi \simeq 0.585$ ) se densifie jusqu'à un état final dépendant de l'amplitude de la sollicitation. La compaction est lente, se déroulant sur environ  $5.10^4$  taps pour atteindre l'état final. Cette densification a pour origine les réarrangements entre grains. L'effet d'une variation du diamètre des billes sur la dynamique de compaction est étudié. Avec une diminution du diamètre des billes de  $2\text{ mm}$  à  $0.7\text{ mm}$ , la compacité finale de l'empilement augmente pour une même amplitude sollicitation. Cet effet peut être attribué à la polydispersité observée sur les billes de  $0.7\text{ mm}$ .

Au cours du processus de compaction, le milieu granulaire est sondé par des transducteurs ultrasonores longitudinaux. En premier lieu, les fonctions de réponse en fréquence du milieu exhibent différentes gammes de fréquences caractéristiques. Une transition apparaît entre une gamme de forte transmission des ondes et une gamme où la diffusion des ondes entre en jeu. Cette transition s'effectue à une fréquence de coupure caractéristique du désordre du milieu. Ensuite, l'effet de la compaction sur ces fonctions de réponse en fréquence montre l'augmentation de la transmission des ondes propagatives en basses fréquences avec le processus de compaction. Cet effet est attribué à la fois à la création de contacts dans le milieu et à l'augmentation de la déformation statique moyenne entre grains.

Les contacts apparaissant dans le milieu sont initialement des contacts faiblement chargés. Il existe cependant une grande variété de contacts faiblement pré-contraints. Par exemple, certains peuvent présenter du glissement et d'autres pas sous l'action de l'onde acoustique. Le troisième chapitre, par l'utilisation de méthodes d'acoustique non linéaire, a pour objectif de caractériser les non-linéarités

acoustiques du milieu et donner des informations supplémentaires sur l'évolution des éléments micromécaniques de l'empilement granulaire. Durant le processus de compaction, le milieu granulaire est sondé, à différentes étapes de la densification, par des ondes longitudinales d'amplitudes acoustiques croissantes. Les expériences de générations d'harmoniques et de génération de fréquence différence ont quantitativement montré une diminution des non-linéarités acoustiques au cours de la compaction granulaire. Lors de la génération d'harmoniques d'une onde monofréquentielle émise dans le milieu, le paramètre de non-linéarité quadratique diminue avec des variations très supérieures à celles observées jusqu'ici (mesures de compacité). Pour la génération d'ondes par mélange de fréquences, la transition  $2 \rightarrow 3/2$  (sur la dynamique en amplitude de l'onde de fréquence différence) vers les plus hautes déformations statiques entre contact a été quantitativement interprétée comme la diminution relative du nombre de contacts faibles. Puisque la variété des contacts faiblement chargés est large, il reste à déterminer quelle proportion de contacts faibles diminue. La compréhension de ces résultats est rendue difficile par la difficulté de s'affranchir des effets linéaires d'atténuation des ondes. En effet, ces expériences s'effectuent à fréquence fixe, dont les caractéristiques linéaires évoluent fortement au cours de la compaction. Un suivi dynamique s'est alors révélé indispensable, et est effectué par des mesures de résonances non linéaires du milieu. La première observation, issue de ces mesures, est la diminution des parties élastiques (diminution du module élastique non linéaire) et dissipatives (augmentation de l'atténuation non linéaire) du paramètres non linéaire hystérétique. Un modèle décrivant les observations effectuées, est développé et mène à la définition d'un nouveau paramètre non linéaire qui caractérise l'hystérésis du milieu. Ce nouveau paramètre est le paramètre de Read, dit "non linéaire", affranchi des effets linéaires de la relation contrainte/déformation du milieu. Ce nouvel indicateur fournit des informations sur l'évolution de la distribution de contacts au cours de la compaction granulaires. Pour cela, un modèle quantitatif évalue la contribution des éléments micromécaniques du milieu granulaire aux non-linéarités élastiques et dissipatives. Il est montré qu'un contact présentant un fort glissement participe plus fortement à la non-linéarité élastique qu'un contact faiblement glissant. Ce modèle permet d'interpréter l'évolution de la proportion de contacts fortement glissants relativement à ceux qui glissent peu. Il s'avère que le nombre de contacts fortement glissants diminue au cours de la compaction granulaire relativement au nombre de contacts présentant un faible glissement. Ce résultat qualitatif traduit bien la physique de la compaction.

Dans un milieu granulaire, une difficulté pour la description de la propagation d'ondes acoustiques, abordée au premier chapitre, est la présence d'une distribution de contacts. Un milieu granulaire contient en effet des chaînes de force (chaînes de billes plus fortement précontraintes que la moyenne) et des grains isolés ou spectateurs (plus faiblement précontraints). Dans le but de mieux comprendre le rôle des chaînes de force sur la propagation acoustique, une approche théorique est réalisée dans le dernier chapitre, dans une configuration du type assemblage granulaire cubique simple périodiquement chargé. Une étude analytique montre, dans des cas simplifiés de la géométrie, la possibilité de guider les ondes acoustiques soit le long des chaînes de force, soit entre celles-ci. La relation de dispersion des modes propagatifs le long d'un plan de force et évanescents dans l'axe perpendiculaire au plan de force,

ainsi que la structure spatiale de ces modes, sont obtenues en fonction du chargement des plans de force. Les caractéristiques de la propagation d'ondes dans un réseau périodique (bande interdite pour la propagation d'ondes, localisation) sont révélées.

D'autres travaux expérimentaux et théoriques ont été réalisés, en marge du problème de la compaction granulaire, sur les effets non linéaires dans les milieux granulaires non consolidés. Le phénomène de clappement (ouverture/fermeture des contacts sous l'action de l'onde acoustique) a été étudié expérimentalement et théoriquement pour décrire le contenu spectral riche obtenu lors des expériences de mélange de fréquences (voir l'annexe C). Il est montré que les singularités de la relation contrainte/déformation de Hertz avec clappement sont à l'origine de la génération de nouvelles composantes fréquentielles par un seul acte de l'interaction non linéaire.

Les perspectives de ce travail de thèse sont multiples. Du point de vue expérimental, la prise en compte de l'atténuation linéaire des ondes est nécessaire pour une meilleure compréhension des effets non linéaires observés. De nombreux paramètres sont susceptibles d'influencer le processus de compaction, comme l'amplitude de sollicitations et le diamètre des billes, et leurs effets restent à étudier de façon plus approfondie sur les mesures acoustiques réalisées. Les perspectives d'application de ce travail au niveau industriel sont potentiellement le diagnostic *in situ* des empilements granulaires confinés dans des volumes clos, comme les silos. En général, les méthodes non linéaires appliquées et les interprétations présentées peuvent être envisageables pour tout type de matériau présentant des inhomogénéités de structures (fissures, contacts). Du point de vue théorique, le problème inverse consistant à déterminer la forme de la distribution de forces de contacts à partir de mesures acoustiques reste un champ d'étude ouvert. Dans le dernier chapitre, l'influence des chaînes de force sur la propagation acoustique est l'objet d'une investigation théorique dans une configuration simple. La mise au point d'une application expérimentale est possible suite aux estimations réalisées, et ces travaux semblent prometteurs du point de vue de la recherche fondamentale. Dans un deuxième temps, la configuration cubique simple du réseau peut être étendue au cas plus général d'un assemblage granulaire hexagonal, plus proche des milieux granulaires réels. La répartition spatiale des chaînes de force introduites dans ce modèle est périodique selon une seule direction du réseau. L'extension à des répartitions de chaînes périodiques selon plusieurs directions du réseau granulaire, mais aussi l'introduction de faibles inhomogénéités spatiales (désordre spatial des chaînes de force, absence localisée d'une chaîne de force) peuvent être l'objet d'études ultérieures menant à une meilleure compréhension de la propagation acoustique dans ces milieux complexes.



# Annexe A

Cette annexe présente le détail du calcul du déterminant de la matrice  $\mathbf{D}$  introduite au chapitre 4. Pour cela, cette matrice est identifiée à la matrice

$$\mathbf{M}_a = \begin{pmatrix} r_1 & a & \dots & \dots & a \\ a & r_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & r_{n-1} & a \\ a & \dots & \dots & a & r_n \end{pmatrix}$$

Pour calculer  $\det(M_a)$ , on calcule d'abord le déterminant de la matrice  $M_{ab}$  définie par :

$$\mathbf{M}_{ab} = \begin{pmatrix} r_1 & a & \dots & \dots & a \\ b & r_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & r_{n-1} & a \\ b & \dots & \dots & b & r_n \end{pmatrix}$$

Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$  et  $J$  la matrice telle que  $\forall [i, j] \in \mathbf{R}^2 : J[i, j] = 1$ .

Le calcul de  $q(\lambda) = \det(M + \lambda J)$  montre par développement par rapport à la première colonne que le polynôme  $q(\lambda)$  est un polynôme de degré 1 en  $\lambda$ . Il existe donc deux réels  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}$  tels que :

$$q(\lambda) = \alpha + \lambda \beta. \quad (4.82)$$

Il est alors simple de montrer les résultats suivants :

$$q(0) = \alpha = \det(M_{ab}), \quad (4.83)$$

$$q(-b) = \det(M - bJ) = \begin{vmatrix} r_1 - b & a - b & \dots & \dots & a - b \\ 0 & r_2 - b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & r_{n-1} - b & a - b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & r_n - b \end{vmatrix}, \quad (4.84)$$

c'est-à-dire

$$q(-b) = \prod_{i=1}^n (r_i - b) = p(b). \quad (4.85)$$

De même,

$$q(-a) = \det(M - aJ) = \begin{vmatrix} r_1 - a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b - a & r_2 - a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & r_{n-1} - a & 0 \\ b - a & \dots & \dots & b - a & r_n - a \end{vmatrix}, \quad (4.86)$$

c'est-à-dire

$$q(-a) = \prod_{i=1}^n (r_i - a) = p(a). \quad (4.87)$$

Les deux réels  $(\alpha, \beta)$  vérifient alors un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} \alpha - a\beta = p(a) \\ \alpha - b\beta = p(b) \end{cases}$$

La solution  $\alpha$  de ce système permet à l'aide d'obtenir le calcul du déterminant de la matrice  $M_{ab}$  :

$$\alpha = \det(M_{ab}) = \frac{1}{a-b} [ap(b) - bp(a)] \quad (4.88)$$

Le résultat précédent (4.88) ne peut pas s'appliquer directement au cas  $a = b$  par la divergence en  $\frac{1}{a-b}$ . L'idée est d'introduire une matrice subsidiaire A définie par :

$$\text{Soit } t \in \mathbf{R}^*, \quad A[i, j] = a + t, \quad i < j \quad (4.89)$$

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r_1 & a+t & \dots & \dots & a+t \\ a & r_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & r_{n-1} & a+t \\ a & \dots & \dots & a & r_n \end{pmatrix}$$

La matrice A est du type  $M_{ab}$  où  $b = a$  et  $a = a+t$ . Son déterminant vaut donc d'après l'équation (4.88)

$$\text{pour } t \in \mathbf{R}^* \quad D(t) = \det(A) = \frac{1}{t} [(a+t)p(a) - ap(a+t)], \quad (4.90)$$

que l'on écrira sous la forme :

$$\text{pour } t \in \mathbf{R}^* \quad D(t) = \det(A) = p(a) - \frac{a}{t} [p(a+t) - p(a)], \quad (4.91)$$

On reconnaît un terme de dérivation dans le second membre à droite, et le développement de Taylor du polynôme  $p(x)$  pour un scalaire  $a$  permet d'écrire

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{1}{2}p''(a)(x-a)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.92)$$

Pour  $x = a + t$ , le développement de Taylor amène :

$$\begin{aligned} p(a+t) &= p(a) + p'(a)t + \frac{1}{2}p''(a)t^2 + \dots \\ &= p(a) + t[p'(a) + \frac{1}{2}p''(a)t + \dots] \\ &= p(a) + t[p'(a) + r(t)], \end{aligned} \quad (4.93)$$

où  $r(t)$  est un polynôme en  $t$  qui s'annule en 0. En remplaçant l'expression (4.93) dans l'équation (4.91), le déterminant de la matrice  $A$  s'écrit

$$\text{pour tout } t \in \mathbf{R}^* \quad D(t) = p(a) - a(p'(a) + r(t)) \quad (4.94)$$

Puisque deux polynômes égaux sur une infinité de valeurs coïncident partout, l'égalité est donc vraie en  $t = 0$

$$\begin{aligned} D(0) &= \det(M_{a=b}) = p(a) - ap'(a) \\ &\text{avec } p(x) = \prod_{i=1}^n (r_i - x) \end{aligned} \quad (4.95)$$





# Annexe B

## Article sur l'influence des chaînes de force publié dans Europhysics Letters

Cet article est un complément de l'étude analytique et numérique effectuée au chapitre 4 sur l'influence des chaînes de force sur la propagation acoustique.



## A method of controlling wave propagation in initially spatially periodic media

C. INSERRA<sup>1</sup>, V. TOURNAT<sup>1</sup> and V. GUSEV<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine UMR-CNRS 6613 - Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 9, France*

<sup>2</sup> *Laboratoire de Physique de l'Etat Condensé UMR-CNRS 6087 - Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 9, France*

received 22 January 2007; accepted 27 March 2007  
published online 27 April 2007

PACS 43.35.Gk – Phonons in crystal lattices, quantum acoustics

PACS 42.70.Qs – Photonic bandgap materials

PACS 43.20.Bi – Mathematical theory of wave propagation

**Abstract** – General physical arguments as well as an analytical theory for a particular system indicate that in addition to a traditional method of wave control through gap opening in an allowed frequency band there exists an opportunity to control waves through window opening in a forbidden frequency band. By introducing additional (second) periodicity in an initially periodic material it is possible to guide high-frequency waves in the directions initially forbidden for their propagation.

Copyright © EPLA, 2007

The method which is currently under intensive studies for waves of different physical nature (particularly for electromagnetic [1,2] and acoustic [3,4] waves) is designing mesomaterials or composite materials with properties varying in space by using as building blocks initially homogeneous but different materials. Control of wave propagation can be achieved through opening in the wave spectrum frequency gaps in which the propagation of waves is forbidden [1–4]. The physical nature of gap opening is based on a scattering of the waves with propagation constants in the vicinity of the Bragg (reciprocal) vectors of the designed periodic structure.

This letter is aimed to attract the attention to an opportunity that the control of waves can be quite different, although similarly based on the Bragg scattering, in materials which are initially periodic in space. In such materials, the forbidden gaps exist from the beginning and the modification of the spectrum of propagative modes can be achieved by opening windows for their propagation in frequency regions that are originally forbidden. We demonstrate that this could be realized by introducing in material properties an additional periodicity.

To demonstrate the difference in the two above-considered methods in rather general terms, let us consider the dispersion relation  $\omega = f(k_x, k_y, k_z)$  for a wave with a cyclic frequency  $\omega$  and wave vector components  $k_x, k_y, k_z$  in a material with physical properties

periodically modulated along the axes with a period  $a$ . This dispersion relation could, in general, contain forbidden bands where only evanescent modes are allowed. The traditional method to modify the spectrum  $\omega = f(0, 0, k_z)$  of the waves directed along the  $z$ -axis is, for this particular case, to introduce an additional modulation of the material properties along the  $z$ -direction with a period  $A$ . This results in Bragg reflection of waves with a wave vector  $k_z = \pi/A$  and, if  $\omega = f(0, 0, \pi/A)$  initially belongs to the propagative band, the forbidden gap opens near this frequency. A different opportunity to control wave propagation along the  $z$ -axis, which we are discussing in this letter, is to introduce an additional periodicity along the  $x$ -axis, and/or  $y$ -axis (but not along the  $z$ -axis) with a period  $A > a$ . As an example, the additional modulation with a period  $A$  along the  $x$ -axis allows the propagation along the  $z$ -axis of not only homogeneous waves with  $k_x = k_y = 0$  (as initially) but additionally inhomogeneous waves with  $k_x \neq 0, k_y = 0$  modulated in amplitude along the  $x$ -axis. The allowed values of the transverse propagation constant  $(k_x)_n$  are controlled by the additionally introduced periodicity and can be found from the condition of constructive interference, or transverse resonance [5], or Bohr-Sommerfeld quantization condition [6]  $(k_x)_n A = 2\pi n$ , where  $n$  is an integer ( $n = 1, 2, \dots$ ). Note that because all the materials are discrete at microscopic level, if microscopical period along

C. Inserra *et al.*

$x$ -axis is equal to  $a$ , then the maximum allowed transverse propagation constant is  $(k_x)_{max} = \pi/a$  and the maximum allowed number of additional modes propagating along the  $z$ -axis will be  $n_{max} = A/a - 1$ , reflecting an obvious fact that the minimum period of additional modulation of the discrete material is equal to  $2a$ . If some of the modes  $\omega = f((k_x)_n, 0, k_z)$ , introduced by the additional modulation, appear in the forbidden frequency bands of the initial dispersion relation  $\omega = f(0, 0, k_z)$ , this opens windows for the wave propagation in the material at initially forbidden frequencies. Although the proposed principle of windows opening is clearly different in its idea from the traditional principle of gap opening, its physical nature is also in Bragg reflections. These are Bragg reflections of the waves propagating along the  $x$ -direction that provide opportunity for the existence of the standing wave patterns along the  $x$ -axis that could propagate along the  $z$ -axis. The wave dispersion branches created by additional modulation correspond to guided modes.

As a simple illustrative example, we consider shear acoustic wave propagation in a cubic packing of elastic cylinders in air (in fig. 1(a)). It should be mentioned that 2D composite material designed of periodically arranged and spatially separated cylinders in a matrix of a material with different elastic properties is one of the most favorite objects both in theory and experiments with phononic crystals [3,4,7–9]. However the system in fig. 1(a) is importantly different from those in refs. [3,4,7–9] because the cylinders are in contact due to external loading. The analyzed periodic material could be equivalently considered as being a granular or as being a porous one. We will consider the acoustic modes transporting energy predominantly through the solid phase of this material and neglect for simplicity coupling with air. The velocities of acoustic waves are determined by the loading of the contacts between the cylinders and are much lower than acoustic velocities in the cylinders as far as the contacts are much softer than the cylinders [10]. Under the above conditions the system can be described as lumped masses (for the cylinders) connected by elastic springs (for the contacts). It is well established that even under homogeneously distributed and static vertical loading, the total force applied to the granular system is mostly transferred just by a fraction of the total number of cylinders arranged in the force transmitting chains, while a large fraction of cylinders remains weakly stressed [11–13]. In the case of transparent cylinders the effect can be visualized by photoelastic experiments with light propagating along the cylinder axis (in cross polaroids) [13]. Even in disordered packing of cylinders the force chains are composed of straight parts containing multiple cylinders each. In ordered triangular packing the straight force chains are longer and the modifications of the force chains directions are largely due to reflections from the walls limiting the system volume [11–13]. In the model system (fig. 1(a)) the spatial periodicity of force chains along the  $x$ -axis is assumed to

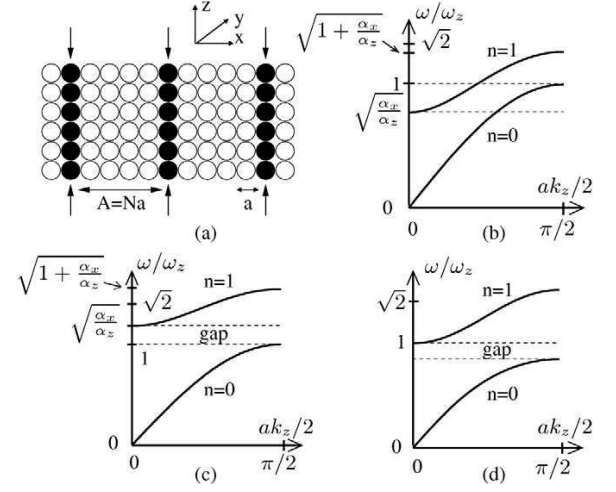


Fig. 1: (a) Cubic packing of elastic cylinders periodically loaded. (b)-(c) Influence of loading on wave propagation: overlap if  $\alpha_x < \alpha_z$  (b) and forbidden gap if  $\alpha_x > \alpha_z$  (c). (d) Gap opening with increasing modulation in case of symmetrical average loading.

be favored by periodicity of the applied vertical load. The equation describing the propagation in the  $(x, z)$ -plane of shear acoustic waves polarized along the cylinder  $y$ -axis is

$$M\partial^2 U_{m,n}/\partial t^2 = \alpha_x [U_{m,n+1} - 2U_{m,n} + U_{m,n-1}] + \alpha_z^w [U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}] + (\alpha_z^s - \alpha_z^w) [U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}] \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta_{m,Np}. \quad (1)$$

Here  $M$  is the mass of the cylinders,  $U_{m,n}$  is the displacement along the  $y$ -axis of the cylinder with the coordinates  $x = ma$ ,  $z = na$  ( $-\infty < m, n < +\infty$  are integers),  $a$  is the diameter of the cylinders and  $\delta_{ij}$  is the Kronecker symbol. The notations  $\alpha_{x,z}$  are used for the shear rigidities of horizontal and vertical contacts, while  $\alpha_z^{s,w}$  for the shear rigidities of strong and weak vertical contacts, respectively. The spatial period of the additional horizontal modulation is equal to  $A = Na$  ( $N \geq 2$  is an integer). In accordance with the Floquet-Bloch general theorem [3,4], the solution of eq. (1) contains  $N$  modes,

$$U_{m,n} = e^{i(\omega t - k_x am - k_z an)} \cdot \sum_{s=0}^{N-1} U_s(k_x, k_z) e^{-i 2\pi ms/N},$$

where  $U_s(k_x, k_z)$  are the amplitudes of modes satisfying the system of  $N$  algebraic equations, which is obtained by substitution of this  $x$ -periodic solution in eq. (1).

In contrast to traditional periodic composites where the discreteness of the micromaterial is neglected, resulting in an infinite system of equations for the amplitudes of the modes [3,4], in our initially discrete system analytical

description of the dispersion relation can be obtained without truncation of the system. In the case when there is no periodic horizontal modulation of system rigidity  $\alpha_z^w = \alpha_z^s = \alpha_z$ , the dispersion relation for the shear waves is

$$\omega^2 = (4\alpha_z/M) \sin^2(ak_z/2) + (4\alpha_x/M) \sin^2(ak_x/2).$$

The waves propagating along the  $z$ -axis are homogeneous with the forbidden frequency band above  $\omega_z = 2\sqrt{\alpha_z/M}$ . The highest frequencies  $\omega_{max} = 2\sqrt{\alpha_z/M + \alpha_x/M} = \omega_z \sqrt{1 + \alpha_x/\alpha_z}$  are allowed for the waves at the edge of the Brillouin zone with  $k_x = k_z = \pi/a$  propagating at an angle to the  $z$ -axis. Even an infinitely weak horizontal modulation  $\alpha_z^s \rightarrow \alpha_z^w$ ,  $\alpha_z^s \neq \alpha_z^w$  drastically modifies the spectrum of the modes propagating along the  $z$ -axis transforming it into

$$\omega_n^2 = \omega_z^2 [\sin^2(ak_z/2) + (\alpha_x/\alpha_z) \sin^2(\pi n/N)], \quad (2)$$

where  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . The additional modulation opens the windows for the propagation along the  $z$ -axis of the waves with frequencies  $\omega > \omega_z$  in the forbidden frequency range of the non-modulated structure. The window for the  $n$ -th guided mode ( $n \neq 0$ ) partially overlaps with that for the low-frequency mode  $n = 0$  if  $\alpha_x < \alpha_z$  (fig. 1(b)) and there is a forbidden gap between them,  $\omega_z \leq \omega \leq \omega_z \sqrt{\alpha_x/\alpha_z}$  if  $\alpha_x > \alpha_z$  (fig. 1(c)). This influence of different loading along  $x$  and  $z$  directions is illustrated in fig. 1(b)-(c) for the case  $N = 2$ . It can be noticed in fig. 1(c) that with increasing ratio  $\alpha_x/\alpha_z$  the window  $\omega_z \sqrt{\alpha_x/\alpha_z} \leq \omega \leq \omega_z \sqrt{1 + \alpha_x/\alpha_z}$  for the guided mode penetrates higher and higher in the initially forbidden frequency band  $\omega > \omega_z$ . The fact that the upper edge of the window corresponds to the maximum allowed frequency  $\omega_{max}$  in the non-modulated material confirms that the nature of the predicted effect is in the possibility of guiding these highest frequency waves along the  $z$ -direction. This opportunity is created by the introduced periodicity along the  $x$ -axis. In the general case  $N \neq 2$  the highest allowed frequency of the windows corresponds to mode  $n = N/2$  when  $N$  is even and to  $n = (N \pm 1)/2$  when  $N$  is odd.

If the periodic modulation along the  $x$ -axis is finite in amplitude it also influences (in addition to asymmetry  $\alpha_x \neq \alpha_z$  of loading) all the allowed modes, in particular, by introducing the forbidden gap in some cases where they are absent in the limit  $\alpha_x \neq \alpha_z$ ,  $\alpha_x \rightarrow \alpha_z$ . For example, in the case of symmetrical average loading with modulation

$$\alpha_z^w = \alpha_z - \Delta\alpha, \alpha_z^s = \alpha_z + \Delta\alpha, \alpha_z = \alpha_x, 0 \leq \Delta\alpha \leq \alpha_z,$$

the dispersion relations for the modes propagating along the  $z$ -axis for  $N = 2$  are

$$\omega_{1,0}^2 = \omega_z^2 [1/2 + s_z^2 \pm \sqrt{(1/2)^2 + (\Delta\alpha/\alpha_z)^2 s_z^4}], \quad (3)$$

where the notation  $s_z$  is introduced for  $\sin(ak_z/2)$ . It can be concluded that with increasing modulation  $|\Delta\alpha|$  the forbidden gap  $\omega_z \sqrt{3/2 - \sqrt{(1/2)^2 + (\Delta\alpha/\alpha_z)^2}} \leq \omega \leq \omega_z$

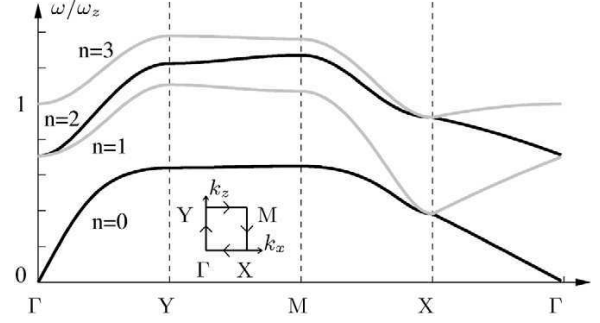


Fig. 2: Dispersion curves in the case  $N = 4$  and  $\Delta\alpha/\alpha_z = 2/3$  for the path  $\Gamma Y M X$  along the first Brillouin zone (inset).

between the two modes opens and the highest allowed frequency increases up to  $\omega_1(k_z = \pi/a) = \omega_z \sqrt{3/2 + \sqrt{(1/2)^2 + (\Delta\alpha/\alpha_z)^2}} > \omega_z \sqrt{2}$  (fig. 1(d)). It is worth mentioning that in the system under consideration the modulation of the strength of vertical contacts along the  $x$ -axis does not influence the wave propagation along the  $x$ -axis. Consequently, even if the modulation induces band folding in  $k_x$ , it does not introduce bands overlap or gaps in the  $x$ -direction. As a result the solutions of the problem predict the diminishing of these effects when the propagation direction of the modes continuously changes from the one along the  $z$ -axis to the one along the  $x$ -axis. This is illustrated in fig. 2 for  $N = 4$ .

It is interesting to note that in accordance with eq. (2), an additional modulation of granular lattice opens the window  $\omega_z \leq \omega \leq \omega_z \sqrt{1 + \alpha_x/\alpha_z}$  for wave propagation along  $z$  even in the limiting case  $N \rightarrow \infty$ . This indicates that window opening could take place also in the case of a single vertical chain in otherwise macroscopically homogeneous and microscopically periodic granular medium. The situation formally corresponds to assuming in eq. (1):

$$N = 0, \alpha_x = \alpha_z^w = \alpha_z, \alpha_z^s = \alpha_z + \Delta\alpha, -\alpha_z \leq \Delta\alpha \leq \infty.$$

We found the solutions of the form  $U_{m,n} = \exp[i(\omega t - k_x a|m| - k_z a n)]$ , which are localized near the force chain ( $\text{Im}(k_x) < 0$ ) and are propagating along  $z$ -axis ( $\text{Im}(k_z) = 0$ ). The dispersion relations for the waves guided by a single force chain are

$$s_z^2 = \frac{1}{1-\delta} \left[ W^2 - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\delta \left( W^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 (1-\delta)} \right], \quad (4)$$

where  $W = \omega/\omega_z$  is the normalized frequency and  $\delta = (\Delta\alpha/\alpha_z)^2$ . The solution with plus sign describes the propagating modes with an exponential transverse distribution  $\exp[-\text{Arsinh}(2|\Delta\alpha/\alpha_z|s_z^2|m|)]$  for  $-\alpha_z \leq \Delta\alpha \leq 0$  (for unloaded chain) in the low-frequency region  $0 \leq \omega \leq \omega_z \sqrt{3/2 - \sqrt{(1/2)^2 + \delta}}$ ; the solution with minus sign describes the propagating

C. Inserra *et al.*

modes with an oscillating tranverse distribution  $((-1)^{|m|}\exp[-\text{Arsinh}(2|\Delta\alpha/\alpha_z|s_z^2|m|)])$  for  $\Delta\alpha \geq 0$  (for loaded chain) in the high-frequency band  $1 \leq \omega \leq \omega_z \sqrt{3/2 + \sqrt{(1/2)^2 + \delta}}$ . Consequently, a single-chain loading ( $\Delta\alpha > 0$ ), provides opportunity for guiding waves along  $z$ -axis with frequencies forbidden in symmetrically loaded material.

In conclusion we would like to mention two circumstances which would be advantages in possible applications of the discussed method of wave control. First, even a weak periodic modulation along the  $x$ -axis introduces in the initially forbidden frequency range an allowed window with the width  $\Delta\omega = (\sqrt{2} - 1)\omega_z$ , which is of the order of the initially allowed frequency band  $0 \leq \omega \leq \omega_z$ . The allowed gap is not continuously shrinking with diminishing amplitude of the additional modulation as it is in the case of forbidden gaps in the common method of wave control through introducing additional periodicity along the  $z$ -axis. Second, the width and positions of the windows and gaps could be actively controlled by varying asymmetry of loading ( $\alpha_x \neq \alpha_z$ ) and modulation amplitude  $|\Delta\alpha|$ .

\*\*\*

We would like to acknowledge fruitful discussions with B. DJAFARI-ROUHANI and B. CASTAGNÈDE. This work is supported by ANR project “grANuLar” No. NT05-3-41989.

## REFERENCES

- [1] JOANNPOLOUS J. D., MEADE R. D. and WINN J. N., *Photonic Crystals* (Princeton University Press, Princeton) 1995.
- [2] SOUKOULIS C. (Editor), *Photonic Band Gap Materials* (Kluwer Academic, Dordrecht) 1996.
- [3] KUSHWAHA M. S., HALEVI P., DOBRZYNSKI L. and DJAFARI-ROUHANI B., *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993) 2022.
- [4] ECONOMOU E. N. and SIGALAS M. M., *Phys. Rev. B*, **48** (1993) 13434.
- [5] AULD B. A., *Acoustic Fields and Waves in Solids* (Krieger Publ. Company, Malabar) 1990.
- [6] LANDAU L. D. and LIFSHITZ E. M., *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory* (Pergamon, New York) 1972.
- [7] KROKHIN A. A., ARRIAGA J. and GUMEN L. N., *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003) 264302.
- [8] WILM W., KHELIF A., BALLANDRAS S., LAUDE V. and DJAFARI-ROUHANI B., *Phys. Rev. E*, **67** (2003) 065602.
- [9] KHELIF A., WILM M., LAUDE V., BALLANDRAS S. and DJAFARI-ROUHANI B., *Phys. Rev. E*, **69** (2004) 067601.
- [10] JOHNSON K. L., *Contact Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge) 1995.
- [11] GUYON E., ROUX S., HANSEN A., BIDEAU D., TROADEC J. P. and CRAPO H., *Rep. Prog. Phys.*, **53** (1990) 373.
- [12] TRAVERS T., AMMI M., BIDEAU D., GERVOIS A., MESSEAGER J. C. and TROADEC J. P., *Europhys. Lett.*, **4** (1987) 329.
- [13] AMMI M., BIDEAU D. and TROADEC J. P., *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **20** (1987) 424.



# Annexe C

## **Article sur le phénomène d'interaction non linéaire non classique soumis à Ultrasonics**

Cet article fait référence aux observations de génération de composantes fréquentielles non décrites par la première interaction non linéaire dans le milieu granulaire non consolidé. Cet article permet d'éclairer la section (3.2.3) succinctement développée.

## NON-CASCADE FREQUENCY-MIXING PROCESSES FOR ELASTIC WAVES IN UNCONSOLIDATED GRANULAR MATERIALS

V. Tournat\* and C. Inerra

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR-CNRS 6613,  
Université du Maine, Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans CEDEX 9, France.

V. Gusev

Laboratoire de Physique de l'État Condensé, UMR-CNRS 6087, Université du Maine,  
Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans CEDEX 9, France.

**Abstract:** Due to disorder, contacts between beads in stressed granular assemblages are not equally loaded. There exists a distribution of contact static loads, containing weakly loaded contacts (the weak contacts) and strongly loaded contacts (the strong contacts involved in the so-called force chains). For an elastic periodic excitation with a given deformation amplitude, the weakest contacts are supposed to clap (periodically open and close) due to the action of the acoustic wave. When increasing the acoustic amplitude, more and more contacts are clapping, progressively producing a non classical spectral signature.

Presented spectra have been observed in a laboratory scale experiment, where two frequencies were initially launched in the medium. Results are obtained for increasing pump wave amplitudes and different frequency pairs. These experimental results are in good agreement with a model derived from the Hertz theory of contacts with possibility of clapping.

**Key words:** non linear acoustics, granular media, elastic waves, contact nonlinearity

### I. INTRODUCTION

In acoustics of homogeneous materials, the broadening of the spectrum of a weak signal launched in the medium could be viewed as a sequence of non linear wave mixing processes. Higher combinational frequencies could be imagined as being generated through a few subsequent non linear scattering processes of the lowest order rather than through a single non linear scattering of higher order. This is due to smoothness of the dependence of strain on stress and its successive derivatives in gas, fluids and homogeneous solids. In theory, it is sufficient to use the first non linear term in the Taylor expansion of the stress-strain relationship for adequate description of weakly non linear acoustic waves.

In micro-inhomogeneous solids, the situation could be different because of possible abrupt changes in stress-strain relationship. In particular, in such materials as rocks, exhibiting hysteretic non linearity [1], abrupt changes in stress-strain relationship take place in transition from loading to unloading. In the precise description of stress-strain relationships, which exhibit discontinuous features themselves or discontinuous features in their derivatives, multiple terms of the Taylor expansion could be important. Thus

higher order non linear phonon scattering processes could be of comparable importance with the lowest order processes. The highest combinational frequencies can be efficiently generated simultaneously with the lowest ones, that is through a non cascade single scattering process involving the necessary number of phonons.

Non cascade processes are also known to be efficient for the so-called contact nonlinearity which could be realized in opening / closing the gaps in unperfect elastic contacts between two surfaces [2], [3]. Under periodic loading, the contacts between surfaces or between the lips of cracks could move in a regime of clapping / tapping, which is characterized by non smoothness of the local stress-strain relationship and / or its derivatives. Recently, the importance of the nonlinear phenomena induced by intermittent contacts between grains has been indicated for unconsolidated granular media, for the self-demodulation process [4], the harmonic generation [5] and the subharmonic and noise excitation [6], [7]. The nonlinear process of modulation transfer (Luxembourg-Gorky) has also been used for the monitoring of small perturbations of the granular assemblage state [8]. In this case, the small induced mechanical perturbations modify mostly the weakest contacts in the medium, which has a strong influence on the detected nonlinear elastic response of the medium.

However, from the non-cascade processes, only the process of harmonic generation has been mostly studied [2]. In this communication we present our research results on the frequency mixing of two commensurate frequencies  $f_1$  and  $f_2$ , and show for example that it is possible to excite in a single scattering process frequencies that are much lower than the difference frequency  $f_2 - f_1$ .

### II. EXPERIMENTAL RESULTS

The experimental setup comprises a container ( $8\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 18\text{ cm}$ ), filled with monodisperse glass beads of  $2\text{ mm}$ -diameter. The acoustic probing is performed by identical wide-band piezo-emitter and receiver, placed on opposite side walls close to the bottom of the container. At this depth, the granular medium being only stressed by its own weight, the average static stress is less than  $3\text{ kPa}$ , which corresponds to an average contact deformation of  $3 \cdot 10^{-5}$  roughly (the maximum strain excitation amplitude,  $10^{-5}$  remains less than this value but close). The per-



formed experiment consists in launching in the medium a two-frequency component signal (the pump wave) and to observe the spectrum as a function of the excitation amplitude. In Fig. 1, such spectrum is plotted for three excitation amplitudes.

This experiment is carried out using a spectrum analyzer (Stanford SR830) both for the generation of the two-frequency component signal and for the spectrum analysis. The amplification of the excitation signal is performed via a Bruel & Kjaer low distortion amplifier to a maximum of  $140 V_{rms}$  at the output. The received signal feeds directly the spectrum analyzer. Carrying exactly the same experiment in air gives, for the maximum excitation amplitudes, a small contribution (under  $-95$  dB) at the demodulated frequency (possibly due to the setup small nonlinearity but also coming from the classical nonlinear effects in air). No other frequencies (and in particular the observed non-cascade frequency components) can be detected in this test experiment carried out in air.

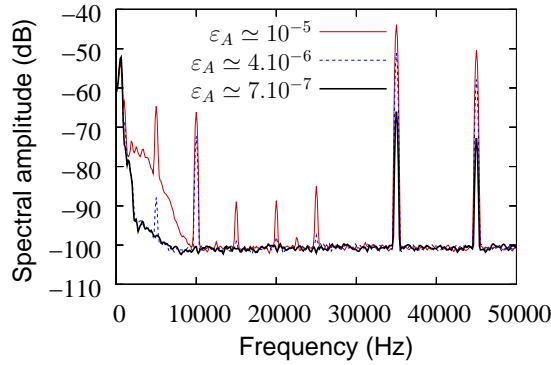


Figure 1: Detected spectra at three excitation amplitudes for  $f_1 = 35$  kHz and  $f_2 = 45$  kHz (0 dB corresponds to 1 V at the detection).

It is possible to observe, for the weakest excitation amplitude  $\varepsilon_A \simeq 7.10^{-7}$ , that only the two excitation frequencies  $f_1 = 35$  kHz and  $f_2 = 45$  kHz are present in the detected spectrum. For  $\varepsilon_A \simeq 4.10^{-6}$ , the difference frequency  $f_2 - f_1$ , classically obtained in the first nonlinear cascade process emerges from electronic noise level. At the highest amplitude  $\varepsilon_A \simeq 10^{-5}$ , other frequencies are visible, 5, 15, 20 and 25 kHz, as well as a continuous noise spectrum for the low frequencies. The overall spectrum is controlled by the frequency response function of the medium and the transducers presented in Fig. 2. It can be seen that the shape of the noise spectrum in Fig. 1 corresponds to the frequency response function, i.e. even if all the frequencies are generated by the nonlinear process of acoustic noise excitation, only the ones efficiently transmitted and detected can be observed. This feature has been already observed and interpreted in [6]. It is possible to define a cut-off frequency of the medium, above which the waves are highly attenuated (mostly by multiple scat-

tering due to the disordered packing or by the band gap effects in regular packings). This is also the reason why, frequency-up conversions are not easily observed in this experiment.

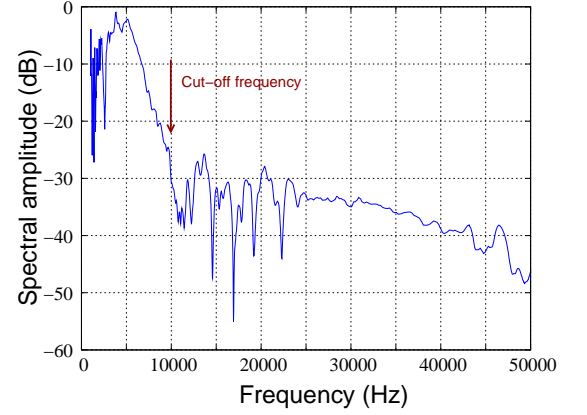


Figure 2: Frequency response function of the medium and the transducers.

In Fig. 3, the amplitude dynamics of several frequency components as a function of the excitation amplitude are plotted. The pump frequency 35 kHz has a linear dependence, while the difference frequency component at 10 kHz exhibits a behavior close to a quadratic one. For the components that can not be obtained in the first cascade process, the dynamics is different, with strong slope variations (5 kHz and 15 kHz in Fig. 3). The observed corresponding amplitudes are well above the electronic noise level for the highest excitation amplitudes. However, they exhibit some small variations at time scales of the order of the second, and quantitative conclusions on the amplitude dynamics are consequently hard to draw.

These behaviors have not been observed for cascade processes in media with weak nonlinearity and are theoretically not allowed in this approximation.

The results presented in Fig. 1 and Fig. 3 are obtained for a given excitation frequency pair ( $f_1 = 35$  kHz and  $f_2 = 45$  kHz). However, spectral components, and especially the non-cascade ones, depend strongly on the chosen frequency pair of excitation, as explained in the next section. This is visible in Fig. 4, which presents a large number of data for different excitation frequency pairs. Each row corresponds to a spectrum where amplitudes are coded in colors. In Fig. 4(a),  $f_1$  is fixed at 30 kHz while  $f_2$  is varied from 40 kHz to 50 kHz. In Fig. 4(b),  $f_1$  and  $f_2$  are varied from 30 kHz to 40 kHz and from 40 kHz to 50 kHz respectively. In Fig. 4(c),  $f_1$  is varied from 30 kHz to 40 kHz while  $f_2$  is fixed at 40 kHz. It is important to note that lower frequencies than the difference one emerges from noise, and some patterns can be observed (Fig. 4(b)).

These observed qualitative features are explained in the next section, with the help of a simple model for a particu-

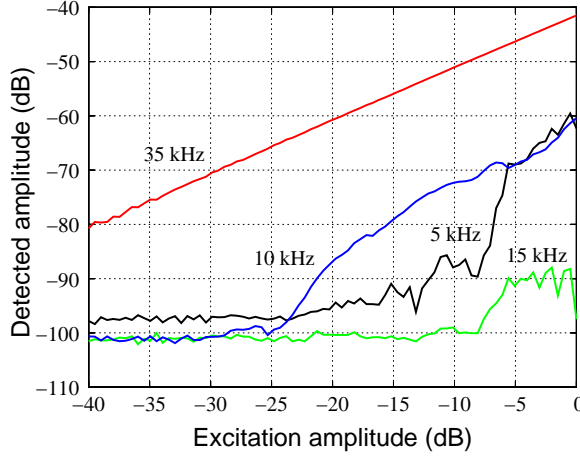


Figure 3: Amplitude dynamics of frequency components, 5, 10, 15 and 35  $kHz$ , as a function of the excitation amplitude (0  $dB$  of excitation corresponds to 140  $V_{rms}$ ). 0  $dB$  corresponds to 1  $V$  for the detected amplitude.

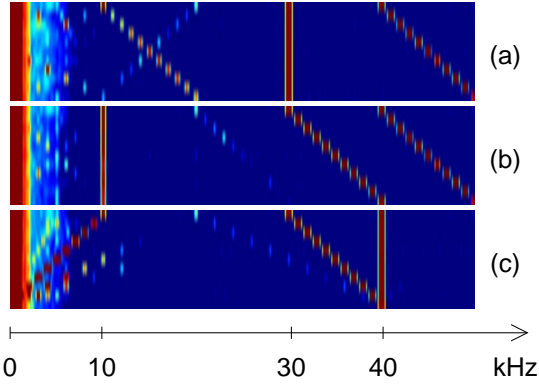


Figure 4: Experimental spectra in rows obtained for different excitation frequency pairs between 30 and 50  $kHz$ . Amplitudes are coded in colors.

lar non smooth non linearity.

### III. THEORETICAL ANALYSIS

In the following, a simple analysis of the observed spectra is performed, taking into account the presence of a clapping type nonlinearity at the level of the contacts. The clapping type nonlinearity and the hysteretic nonlinearity contain singularities in their stress - strain relationships or their successive derivatives. It is expected that the qualitative features of such non smooth nonlinearities are similar in the effects observed here. Taking into account the estimates for the generation and amplification of subharmonics in a medium with quadratic non linearity [6], nonlinearities with singularities (clapping, tapping, hysteretic) are the most relevant to explain the observed effects of subharmonic and noise excitation at such low excitation lev-

els.

Let us consider for instance the static stress-strain relationship of an Hertzian contact of the form

$$\sigma_0 = -C(-\varepsilon_0)^{3/2} \quad , \quad (1)$$

where  $\sigma_0$  is the static stress,  $\varepsilon_0$  is the strain and  $C$  a constant related to the elastic parameters and the radii of the spheres [9]. When an acoustic wave excites the contact, the dynamic stress-strain relationship can be written as [4]

$$\sigma_0 + \tilde{\sigma} = -C(-\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon})^{3/2} H(-\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}) \quad , \quad (2)$$

with the dynamic part of the stress  $\tilde{\sigma}$ , the dynamic part of the strain  $\tilde{\varepsilon}$  and the Heaviside function  $H(-\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon})$  which takes into account the fact that there is no stress between the beads when they are not in contact.

In the case where  $|\tilde{\varepsilon}| \ll |\varepsilon_0|$ , the stress-strain relationship can be expanded in Taylor series and the dominant nonlinearity is the classical quadratic nonlinearity [4]. In the case when the previous strong inequality is not fulfilled, the expansion is no more possible and if  $|\tilde{\varepsilon}| > |\varepsilon_0|$ , the Heaviside function begins to play an important role in the nonlinearity.

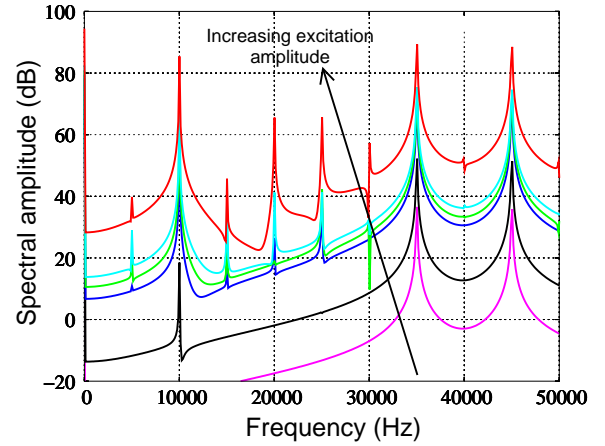


Figure 5: Spectra of the stress in Eq. 2 obtained with a two frequency strain excitation ( $f_1 = 35 kHz$  and  $f_2 = 45 kHz$ ), for different excitation amplitudes.

At first, by introducing a strain signal  $\tilde{\varepsilon}$  composed of two frequencies  $f_1$  and  $f_2$ , it is possible to calculate by fast Fourier transform, the resulting stress  $\tilde{\sigma}$ , using Eq. (2). With the same frequencies as in the experiment in Fig. 1 and Fig. 3,  $f_1 = 35 kHz$  and  $f_2 = 45 kHz$ , the result is plotted for different excitation amplitudes in Fig. 5. The same frequencies as those observed experimentally in Fig. 1 are obtained, including the non classical ones at 5, 15, 20, and 25  $kHz$  for instance. The main differences between this calculated spectrum and the experimental one are associated with the influence of the experimental frequency response function of the system (see Fig. 2).

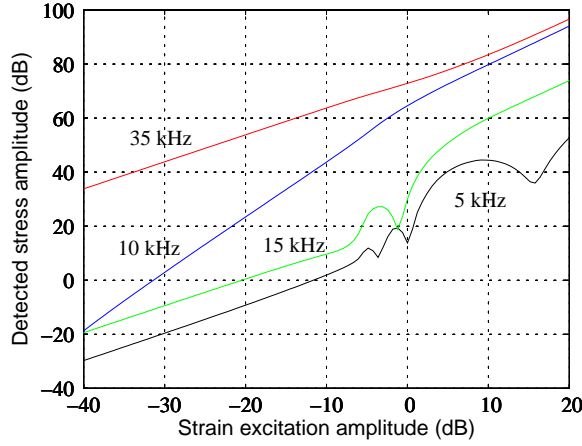


Figure 6: Amplitude dynamics of several frequency components obtained by Fourier transform of the stress - strain relationship (2).

In Fig. 6, the amplitude dynamics of some particular frequency components of the spectrum are plotted as a function of the excitation amplitude. Similarly to the experimental amplitude dynamics of Fig. 3, the dynamics of the pump and difference frequencies (35 and 10 kHz) are monotonous and the dynamics of the 5 and 15 kHz components has a more complex behaviour in amplitude, with strong slope variations.

In order to analyze theoretically the non classical role of the Heaviside function in the stress-strain relationship, let us consider, for example, a two-dimensional granular medium composed of cylinders. For small loadings, the contact between two cylinders is known to provide a stress proportional to the strain (linear elasticity) if the contact is closed [9]. However, the open contact is unstressed. As a result, the considered micromechanical element is strongly nonlinear. The corresponding stress-strain relationship could be described in this case by

$$\sigma = C\varepsilon H(-\varepsilon) \quad (3)$$

The stress-strain relationship (3) is schematically plotted in Fig. 7. Note that in our notation, negative strain (compression) corresponds to a closed contact. There is a difference between Eq. (3) and Eq. (2), namely the presence of the power 3/2 due to the Hertz contact between two beads in Eq. (3) and the linear dependence in Eq. (2). The simpler bilinear case of Eq. (3) enables to perform analytical calculations on the frequency mixing processes associated with the Heaviside function in the stress-strain relationship. Numerical calculations of spectra of the form Fig. 5 in the case (3) and in the case (2) have been performed and do not reveal qualitative differences in the emerging frequency components. The power (3/2 or 1) in the stress-strain relationship influences mainly the amplitude dynamics of the frequency components of the spectrum.

In the dynamics of contacts, two regimes are commonly distinguished in the literature [2]. The clapping regime corresponds to an initially (in the absence of acoustic field) closed contact  $\varepsilon_0 < 0$  and the tapping regime corresponds to an initially open contact  $\varepsilon_0 > 0$  [2].

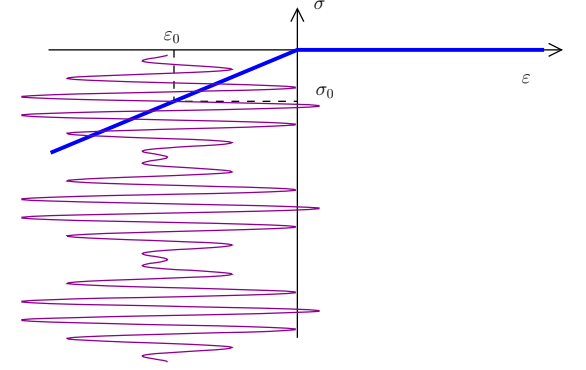


Figure 7: Stress-strain relationship for a contact between cylinders and time profile of the strain excitation.

The strain at the individual contact between two cylinders can be written,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(\omega_2 t + \phi) \quad (4)$$

where  $\varepsilon_{1,2}$  are acoustic strain amplitudes and  $\phi$  is a phase term. According to (3) and Fig. 7, the response of the system to the applied strain is linear with increasing  $\varepsilon_{1,2}$  until the critical pump amplitude is such that  $\varepsilon_1 \cos(\omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(\omega_2 t + \phi)$  reaches the value  $-\varepsilon_0$ . From this critical pump wave amplitude, the contact starts to open during a period  $T_0 = t_2 - t_1$  of its motion between characteristic times  $t_1$  and  $t_2$  (see inset in Fig. 8). The acoustic strains higher than  $-\varepsilon_0$  are not transmitted by the contact. This strong threshold nonlinearity influences the spectrum of the stress quite differently than weak nonlinearity.

In Fig. 8, the strain excitation  $\varepsilon$  is plotted as a function of time. The corresponding stress dynamic evolution deduced from this strain excitation and from the stress-strain relationship is plotted in Fig. 9.

The stress  $\sigma$  can be decomposed into a linear contribution  $\sigma_\ell$ , which does not modify the spectrum, and a non-linear contribution  $\sigma_{n\ell}$ , which is responsible for the signal modification,

$$\sigma = \sigma_\ell + \sigma_{n\ell} = E\varepsilon - E\varepsilon[1 - H(-\varepsilon)] \quad (5)$$

The contribution  $\sigma_{n\ell}$  exists only in the interval  $t_1 \leq t \leq t_2$  near the maximum of the strain signal at  $t = t_0$  (see Fig. 8).

In the case plotted in Fig. 9, the single maximum over the signal period  $-T/2 \rightarrow T/2$  is characterized by its central time occurrence  $t_0$ . For the particular case where two frequencies  $f_1$  and  $f_2$  are initially launched in the medium, the total signal period of the form (4) is equal to the inverse of the greatest common divisor of these frequencies,

i.e. if  $T_1 = 1/f_1$ ,  $T_2 = 1/f_2$  then the signal period is  $T = n_2 T_2 = n_1 T_1$  where  $n_1$  and  $n_2$  are the smallest possible integers.

Importantly, the localized character of the nonlinear contribution to the stress  $\sigma_{nl}$  with a time scale duration  $T_0 = t_2 - t_1 \ll T$  near the central time  $t_0$  ensures that the strong nonlinearity excites simultaneously (in a single act of nonlinear scattering) many new spectral components at  $F = m/T$  where  $m = 0, 1, 2, \dots$  which can be different from the frequencies obtained in the first step of successive approximations (namely  $f_2 - f_1$ ,  $f_1 + f_2$ ,  $2f_1$ ,  $2f_2$ ) because  $F$  can be different from  $f_2 - f_1$ . For instance, the period of signal  $\cos(2\pi 31000t) + \cos(2\pi 41000t)$  is  $T = 31/31000 = 41/41000 = 1/1000$  s which is 10 times longer than the period of the difference frequency component at  $41000 - 31000 = 10000$  Hz.

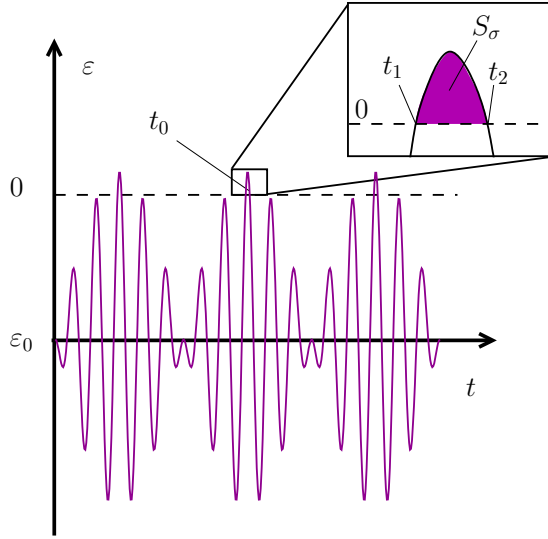


Figure 8: Strain excitation signal as a function of time.

If the excited strain is written in the form (4), it is possible for  $\phi \rightarrow 0$ , by looking for the extremum close to  $t = 0$  (zero of the time derivative of the total strain), to find an expression for the characteristic time  $t_0$  as,

$$t_0 \simeq -\frac{\varepsilon_2 \omega_2}{\varepsilon_1 \omega_1^2 + \varepsilon_2 \omega_2^2} \phi . \quad (6)$$

The complex amplitudes of the nonlinear stress components at frequencies  $F = mf$  are denoted by  $\bar{\sigma}_{nl}$  and can be written as

$$\bar{\sigma}_{nl} = \int_{-T/2}^{T/2} \sigma_{nl} e^{i2\pi \frac{m}{T} t} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{nl} e^{i2\pi \frac{m}{T} t} dt . \quad (7)$$

Under the condition  $m \ll \frac{1}{2\pi} \frac{T}{t_2 - t_1}$ , the complex amplitude of the nonlinear stress excited in the clapping process at the frequency  $F = mf$  can be written as

$$\bar{\sigma}_{nl} \simeq e^{i2\pi m f t_0} \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{nl} dt = S_\sigma e^{i2\pi m f t_0} , \quad (8)$$

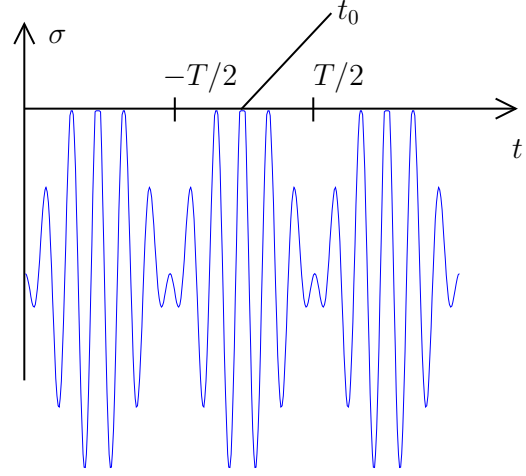


Figure 9: Stress resulting from strain excitation and stress-strain relationship plotted in Fig. 7.

where  $S_\sigma$  is the area of the stress which is cut by the singularity of the stress-strain relationship (see Fig. 8).

From (6) and (8), the excitation phase of the frequency  $mf$  is deduced:

$$\phi_{mf} \simeq m f \frac{\varepsilon_2 f_2}{\varepsilon_1 f_1^2 + \varepsilon_2 f_2^2} \phi . \quad (9)$$

These results show that frequencies  $mf$  (with  $m \ll \frac{1}{2\pi} \frac{T}{t_2 - t_1}$ ) are excited with equal amplitudes in a single act of scattering, which is different from a classical cascade process. The phase of the  $mf$  frequency excitation depends on the relative amplitude of the excited waves at  $f_1$  and  $f_2$ . This last point could be checked in the future. It has been however experimentally observed a dependence of the non-cascade frequency component amplitude on the relative phase  $\phi$ . The non monotonous dynamics can be explained by the occurrence of more and more saturated extrema in the stress when the excitation amplitude is increased. Their appearance excites a given non cascade frequency, sometimes in phase with previously existing extrema or sometimes out of phase. This is an opportunity to explain the observed complex behavior in Fig. 3 for instance. Looking in details at the frequencies present in each spectrum of Fig. 4, obtained for different excitation frequency pairs, the expectation from the simple developed model that frequencies  $F = m/T$  are excited is confirmed. As an example, for  $f_1 = 31$  kHz and  $f_2 = 41$  kHz (corresponding to  $1/T = 1$  kHz while the frequency of the pump signal envelope and thus the demodulated frequency is 10 kHz), frequencies 2, 5, 6, 7, 9, 10 and 11 kHz can be observed. For  $f_1 = 32$  kHz and  $f_2 = 42$  kHz (corresponding to  $1/T = 2$  kHz), frequencies 4, 6, 8, 10 and 12 kHz are observed. This corresponds well to the  $m/T$  frequencies. It remains however, in each experiment where the difference frequency is 10 kHz, a

frequency of 5  $kHz$  which can not be explained every-time by this simple analysis. This could be associated with period doubling effects for the difference frequency wave itself [6].

#### IV. CONCLUSIONS

A non cascade nonlinear process of frequency mixing has been studied in experiments and theory. Due to the singularity of the stress - strain relationship at the level of a single contact, the nonlinearity becomes of infinite order and higher order nonlinear phonon scattering processes are of comparable importance with the lowest order processes. One of the peculiar signatures of high order nonlinearity is the possible excitation of arbitrarily low frequencies from two well-chosen excitation frequencies, because the lowest excited frequency is equal to the greatest common divisor of these two frequencies. The nonlinear acoustic resolution of the pump signal period (which can be much longer than the pump signal envelope period) is attributed to the presence of the Heaviside function in the stress-strain relationship.

It is expected that these results can help in the acoustic probing of the granular media (contact statistic distribution, average stress) and of the interfaces between solids (such as cracks).

#### V. ACKNOWLEDGMENTS

This work is supported by ANR project "grANuLar" n° NT05-3-41989.

#### VI. REFERENCES

- [1] R.A. Guyer and P.A. Johnson, "Nonlinear mesoscopic elasticity: evidence of a new class of materials," *Phys. Today*, vol. 52, no. 30, 1999.
- [2] I.Yu. Solodov, N. Krohn, and G. Busse, "CAN: an example of nonclassical acoustic nonlinearity in solids," *Ultrasonics*, vol. 40, pp. 621–625, 2002.
- [3] I.Yu. Solodov and B.A. Korshak, "Instability, chaos, and memory in acoustic-wave crack interaction," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, pp. 014303, 2002.
- [4] V. Tournat et al., "Probing weak forces in granular media through nonlinear dynamic dilatancy: clapping contacts and polarization anisotropy," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, no. 8, pp. 085502, 2004.
- [5] V. Tournat, V.E. Gusev, V.Yu. Zaitsev, and B. Castagnède, "Acoustic second harmonic generation with shear to longitudinal mode conversion in granular media," *Europhys. Lett.*, vol. 66, no. 6, pp. 798–804, 2004.
- [6] V. Tournat, V.E. Gusev, and B. Castagnède, "Subharmonics and noise excitation in transmission of acoustic wave through unconsolidated granular medium," *Phys. Lett. A*, vol. 326, no. 5-6, pp. 340–348, 2004.
- [7] B.-N. Kim, K.I. Lee, and S.W. Yoon, "Experimental study on subharmonic and ultraharmonic acoustic waves in water-saturated sandy sediments," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 121, no. 4, pp. 137–144, 2007.
- [8] V.Yu. Zaitsev et al., "Luxembourg-gorky effect in a granular medium: probing perturbations of the material state via cross-modulation of elastic waves," *Europhys. Lett.*, vol. 70, no. 5, pp. 607–613, 2005.
- [9] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

\*Email: vincent.tournat@univ-lemans.fr



# Bibliographie

- [1] T. Aste. Variations around disordered close packing. *J. Phys. : Condens. Matter*, 17 :2361–2390, 2005.
- [2] G. C. Barker and A. Mehta. Vibrated powders : Structure, correlations, and dynamics. *Phys. Rev. A.*, 45(6) :3435–3446, 1992.
- [3] G. C. Barker and A. Mehta. Transient phenomena, self-diffusion, and orientational effects in vibrated powders. *Phys. Rev. E.*, 47 :184–188, 1993.
- [4] A. Barrat and V. Loreto. Response properties in a model for granular matter. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 33 :4401–4426, 2000.
- [5] I. Yu. Belyaeva and V. Yu. Zaitsev. Nonlinear elastic properties of microinhomogeneous hierarchically structured media. *Acoust. Phys.*, 43(5) :510–515, 1997.
- [6] R. Ben Aïm and P. Le Goff. Effet de paroi dans les empilements désordonnés de sphères et application à la porosité de mélanges binaires. *Powder Technology*, 1 :281–290, 1967.
- [7] R. F. Benenati and C. B. Brosilow. Void fraction distribution in beds of spheres. *I. Ch. E. Journal*, 8 :359–361, 1962.
- [8] H. O. Berktaý. Possible exploitation of non-linear acoustics in under-water transmitting applications. *J. Sound Vib.*, 2 :435–461, 1965.
- [9] J. G. Berryman. Random close packing of hard spheres and disks. *Phys. Rev. A.*, 27(2) :1053–1061, 1983.
- [10] T. Bouteux and P. G. de Gennes. Compaction of granular mixtures : a free volume model. *Phys. A.*, 244 :59–67, 1997.
- [11] L. Brillouin. *Wave propagation in periodic structures*. Dover Publications, 1953.
- [12] E. Caglioti, V. Loreto, H. J. Hermann, and N. Nicodemi. A "tetris-like" model for the compaction of dry granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 69 :1189–1192, 1997.
- [13] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J. P. Bouchaud, and P. Claudin. Jamming, force chains, and fragile matter. *Phys. Rev. Lett.*, 81(9) :1841–1844, 1998.
- [14] P. Claudin. *La physique du tas de sable*. Annales de Physique, 1999.
- [15] C. Coste, E. Falcon, and S. Fauve. Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact. *Phys. Rev. E.*, 56(5) :6104–6117, 1997.

- [16] C. Coste and B. Gilles. On the validity of Hertz contact law for granular materials acoustics. *Eur. Phys. J. B.*, 7 :155–168, 1999.
- [17] G. D’Anna and G. Gremaud. The jamming route to the glass state in weakly perturbed granular media. *Nature*, 413 :407–409, 2001.
- [18] M. De Billy. Experimental study of sound propagation in a chain of spherical beads. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(4) :1486–1495, 2000.
- [19] P. G. Debenedetti and F. H. Stillinger. Supercooled liquids and the glass transition. *Nature*, 410 :259–264, 2001.
- [20] J. Duran. *Sables, poudres et grains*. Eyrolles Sciences, 1997.
- [21] E. N. Economou and M. M. Sigalas. Classical wave propagation in periodic structures : Cernet versus network topology. *Phys. Rev. B*, 48 :13434–13438, 1993.
- [22] S. F. Edwards and D. V. Grinev. Statistical mechanics of vibration-induced compaction of powders. *Phys. Rev. E.*, 58(4) :4758–4762, 1998.
- [23] S. F. Edwards and R. B. S. Oakeshott. Theory of powders. *Phys. A*, 157 :1080–1090, 1989.
- [24] J. M. Erikson, N. W. Mueggenburg, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Force distribution in three-dimensional compressible granular packs. *Phys. Rev. E.*, 66 :040301, 2002.
- [25] J. L. Finney. Random packings and the structure of simple liquids I. the geometry of random close packing. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 319 :479–493, 1970.
- [26] K. L. Gavrilov. Cluster model for compaction of vibrated granular materials. *Phys. Rev. E.*, 58(2) :2107–2114, 1998.
- [27] J. Geng, E. L. Howell, E. Longhi, R. P. Behringer, G. Reydellet, L. Vanel, E. Clement, and S. Luding. Footprints in sand : the response of a granular material to local perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 87(3) :035506, 2001.
- [28] A. Granato and K. Lucke. Theory of mechanical damping due to dislocations. *J. of Appl. Phys.*, 276(6) :583–593, 1956.
- [29] V. E. Gusev. Parametric acoustic source in a medium with hysteretic quadratic nonlinearity. *Acoust. Lett.*, 22 :30–34, 2000.
- [30] V. E. Gusev, Tournat, and B. Castagnède. Amplitude- and frequency-dependent nonlinearities in the process of thermally-induced transitions in the Preisach model of acoustic hysteresis. *Phys. Rev. B.*, 72 :054104, 2005.
- [31] V. E. Gusev, Tournat, and B. Castagnède. *Phénomènes d’acoustique non linéaire dans les milieux micro-inhomogènes, Matériaux et Acoustique*. Volume 2, Chapitre2, pp. 103-104, Lavoisier, 2006.
- [32] R. A. Guyer, K. R. McCall, and G. N. Boitnott. Hysteresis, discrete memory and nonlinear wave propagation in rock : a new paradigm. *Phys. Rev. Lett.*, 74(17) :3491–3494, 1995.
- [33] R. A. Guyer, J. TenCate, and P. A. Johnson. Hysteresis and the dynamic elasticity of consolidated granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :3280–3283, 1999.



- [34] M. F. Hamilton and D. T. Blackstock. *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, San Diego, 1998.
- [35] D. J. Holcomb. Memory, relaxation, and microfracturing in dilatant rock. *J. Geophys. Res.*, 86(7) :6235–6248, 1981.
- [36] D. W. Howell, B. Miller, C. O’Hern, and R. P. Behringer. Stress fluctuations for granular materials. *Proc. Powders & Grains’97*, pages 133–147, 1997.
- [37] C. Inserra, V. Tournat, and V. E. Gusev. A method of controlling wave propagation in initially spatially periodic media. *Europhys. Lett.*, 78 :44001, 2007.
- [38] H. M. Jaeger, C. Liu, and S. R. Nagel. Relaxation at the angle of repose. *Phys. Rev. Lett.*, 62(1) :40–43, 1989.
- [39] H. M. Jaeger and S. R. Nagel. Physics of the granular state. *Sciences*, 255 :1523–1531, 1992.
- [40] X. Jia, C. Caroli, and B. Velicky. Ultrasound propagation in externally stressed granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :1863–1866, 1999.
- [41] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [42] P. Johnson and A. Sutin. Slow dynamics and anomalous fast dynamics in diverse solids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(1) :124–130, 2005.
- [43] P. A. Johnson, B. Zinszner, P. Rasolofosoan, F. Cohen-Tenoudji, and K. Van den Abeele. Dynamic measurements of the nonlinear elastic parameter  $\alpha$  in rock under varying conditions. *J. of Geophys. Res.*, 109 :B02202, 2004.
- [44] C. Josserand, A. V. Tkachenko, D. M. Mueth, and H. M. Jaeger. Memory effect in granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 85(17) :3632–3635, 2000.
- [45] J. B. Knight, E. E. Ehrichs, V. Y. Kuperman, J. K. Flint, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Experimental study of granular convection. *Phys. Rev. E*, 54 :5726–5738, 1996.
- [46] J. B. Knight, C. G. Fandrich, C. N. Lau, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Density relaxation in a vibrated granular material. *Phys. Rev. E*, 51(5) :3957–3963, 1995.
- [47] J. F. Knott. *Fundamentals of Fracture Mechanics*. Butterworths, London, 1973.
- [48] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.*, 71 :2022–2025, 1993.
- [49] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Theory of Elasticity*. Pergamon, New York, 1986.
- [50] A. N. Lazaridi and V. F. Nesterenko. Observation of a new type of solitary waves in a one-dimensional granular medium. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 26(3) :405–408, 1985.
- [51] A. B. Lebedev. Amplitude-dependent elastic-modulus defect in the main dislocation-hysteresis models. *Phys. of the Solid State*, 41(7) :1105–1111, 1999.
- [52] D. Lesniewska and M. Sklodowski. Photoelastic investigation of localization phenomena in granular materials. *Powders and Grains*, pages 69–72, 2005.
- [53] C. H. Liu and S. R. Nagel. Sound in a granular material : Disorder and nonlinearity. *Phys. Rev. B*, 48(21) :15646–15650, 1993.

- [54] G. Lovoll, K. J. Maloy, and E. G. Flekkoy. Force measurements on static granular materials. *Phys. Rev. E.*, 60(5) :5872–5878, 1999.
- [55] H. Makse. Thermodynamics and effective temperatures in sheared granular matter and emulsions. *Eur. Phys. J. E.*, 9(3) :265–269, 2004.
- [56] H. Makse and J. Kurchan. Testing the thermodynamic approach to granular matter with a numerical model of a decisive experiment. *Nature*, 415 :614–617, 2002.
- [57] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Company, New York, San Francisco, 1977.
- [58] R. K. McGeary. Mechanical packing of spherical particles. *J. Am. Cer. Soc.*, 44(10) :513–522, 1961.
- [59] G. McHale, M. I. Newton, and F. Martin. Layer guided shear horizontally polarized acoustic plate modes. *J. of Appl. Phys.*, 91(9) :5735–5744, 2002.
- [60] G. D. Meegan, P. A. Johnson, R. A. Guyer, and K.R. McCall. Observations of nonlinear wave behavior in sandstone. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(6) :3387–3390, 1993.
- [61] R. D. Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *J. of Appl. Mech.*, 71 :259–268, 1949.
- [62] R. D. Mindlin and H. Deresiewicz. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J. of Appl. Mech.*, 20 :327–344, 1953.
- [63] N. W. Mueggenburg, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Stress transmission through three-dimensional ordered granular arrays. *Phys. Rev. E.*, 66 :031304, 2002.
- [64] K. Naugolnykh and L. A. Ostrovsky. *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [65] V. F. Nesterenko. Propagation of nonlinear compression pulses in granular media. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 24(4) :567–575, 1983.
- [66] E. R. Nowak, J. B. Knight, M. L. Povinelli, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Density fluctuations in vibrated granular materials. *Phys. Rev. E.*, 57 :1971–1982, 1998.
- [67] R. Omnès. Sur l’empilement désordonné d’un système de sphères de rayons différents. *J. de Physique*, 46 :139–147, 1995.
- [68] G. Y. Onoda and E. G. Liniger. Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset. *Phys. Rev. Lett.*, 64(22) :2727–2730, 1990.
- [69] L. A. Ostrovsky. Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(6) :3332–3337, 1991.
- [70] L. A. Ostrovsky and P. A. Johnson. Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials. *Rivista del Nuovo Cimento*, 24(7) :1–46, 2001.
- [71] P. Philippe. *Etude théorique et expérimentale de la densification des milieux granulaires*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2002.

- [72] P. Philippe and D. Bideau. Numerical model for granular compaction under vertical tapping. *Phys. Rev. E*, 63 :051304, 2001.
- [73] P. Philippe and D. Bideau. Granular medium under vertical tapping : change of compaction and convection dynamics around the liftoff threshold. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :104302, 2003.
- [74] F. Radjai, M. Jean, S. Roux, and J. J. Moreau. Force distribution in dense two-dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77(2) :274–277, 1996.
- [75] F. Radjai, D. Wolf, M. Jean, and J. J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Lett.*, 80(1) :61–64, 1998.
- [76] J. Rajchenbach. Flow of dense grain collections down an incline : experimental results and analyses. *Powders and Grains*, pages 799–802, 2005.
- [77] T. A. Read. The internal friction of single metal crystals. *Phys. Rev.*, 58 :371–380, 1940.
- [78] P. Ribière, P. Richard, R. Delannay, and D. Bideau. Importance of convection in the compaction mechanisms of anisotropic granular media. *Phys. Rev. E*, 71 :011304, 2005.
- [79] P. Richard, M. Nicodemi, R. Delannay, P. Ribière, and D. Bideau. Slow relaxation and compaction of granular systems. *Nature Mat.*, 4 :121, 2005.
- [80] G. D. Scott and D. M. Kilgour. The density of random close packing of spheres. *J. Phys. D.*, 2(2) :863–866, 1969.
- [81] I. Yu. Solodov, N. Krohn, and G. Busse. CAN : an example of nonclassical acoustic nonlinearity in solids. *Ultrasonics*, 40 :621–625, 2002.
- [82] N. Taberlet, W. Losert, and P. Richard. Understanding the dynamics of segregation bands of simulated granular material in a rotating drum. *Europhys. Lett.*, 68(4) :522–528, 2004.
- [83] J. Talbot, G. Tarjus, and P. Viot. Aging and responses properties in the parking-lot model. *Eur. Phys. J.*, 5 :445–449, 2001.
- [84] V. Tournat, V. E. Gusev, and B. Castagnède. Subharmonics and noise excitation in transmission of acoustic wave through unconsolidated granular medium. *Phys. Lett. A*, 326(5) :340–348, 2004.
- [85] V. Tournat, V. Yu. Zaitsev, V. E. Gusev, V. E. Nazarov, P. Béquin, and B. Castagnède. Probing weak forces in granular media through nonlinear dynamic dilatancy : clapping contacts and polarization anisotropy. *Phys. Rev. Lett.*, 92(8) :085502, 2004.
- [86] T. Travers, M. Ammi, D. Bideau, A. Gervois, J. C. Messenger, and J. P. Troadec. Uniaxial compression of 2d packings of cylinders. Effects of weak disorder. *Europhys. Lett.*, 4 :329–332, 1987.
- [87] K. E-A. Van Den Abeele. Elastic pulse wave propagation in media with second or higher-order nonlinearity. Part I. Theoretical framework. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(6) :3334–3390, 1996.
- [88] P. J. Westervelt. Parametric acoustic array. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35 :535–537, 1963.
- [89] V. Yu. Zaitsev. A model of anomalous elastic nonlinearity of microinhomogeneous media. *Acoust. Lett.*, 19(9) :171–174, 1996.

- 
- [90] V. Yu. Zaitsev, V. E. Gusev, and B. Castagnède. Thermoelastic mechanism for logarithmic slow dynamics and memory in elastic wave interactions with individual cracks. *Phys. Rev. Lett.*, 90(7) :075501, 2003.
  - [91] V. Yu. Zaitsev, A. B. Kolpakov, and V. E. Nazarov. Self-demodulation of acoustic pulses in river sand : Experiment. *Acoust. Phys.*, 45 :202–208, 1999.
  - [92] V. Yu. Zaitsev and P. Sas. Dissipation in microinhomogeneous solids : inherent amplitude dependent dissipation of nonhysteretical and nonfrictional type. *Acustica Acta Acustica*, 86 :429–445, 2000.
  - [93] V. A. Zverev. How the idea of a parametric acoustic array was conceived. *Acoust. Phys.*, 45(5) :611–618, 1999.

**Titre : Caractérisation de la compaction granulaire par des méthodes acoustiques linéaires et non linéaires.**

Récemment, un nombre croissant d'observations expérimentales et de modélisations ont été effectuées en acoustique non linéaire dans les matériaux micro-inhomogènes, comme les roches ou les milieux granulaires. Les méthodes d'acoustique non linéaire ont montré une forte sensibilité à la présence de défauts de la structure (fissures, contacts inter-grains), et sont notamment utilisées depuis peu pour le contrôle non destructif des matériaux fissurés ou endommagés. Les milieux granulaires, composés de grains non cohésifs, comportent des contacts qui leur assurent une forte non linéarité acoustique. Ils constituent donc des matériaux d'étude intéressants qui présentent des applications dans de nombreuses branches de l'industrie. En particulier, le processus de compaction, qui consiste à diminuer le volume du milieu (par des vibrations extérieures le plus souvent) est très largement utilisé dans la pratique : stabilisation des sols avant construction, ballasts, industrie du béton, stockage de matériaux agroalimentaires, ... Dans ce travail de thèse, différents effets d'acoustique non linéaire sont étudiés au sein d'un milieu granulaire non consolidé au cours du processus de compaction.

Dans un premier temps, un dispositif expérimental de compaction d'un assemblage de billes de verre a été mis au point, comprenant une mesure de l'évolution du volume du matériau. Le milieu est sondé à l'aide d'ondes acoustiques et permet la mesure de paramètres acoustiques tels que la variation de vitesse des ondes et l'atténuation linéaire. Dans un second temps, la compaction du milieu granulaire est suivie par des méthodes d'acoustique non linéaire. L'étude de la génération d'harmoniques et de la génération de fréquence différence permet de quantifier l'évolution du paramètre de non linéarité quadratique. Les rôles relatifs de l'élasticité non linéaire (diminution du module élastique non linéaire du milieu) et de la dissipation non linéaire (augmentation de l'atténuation non linéaire) peuvent être analysés à l'aide des résonances non linéaires du milieu. Un modèle, décrivant les observations effectuées, est développé et mène à la définition d'un nouveau paramètre non linéaire qui caractérise l'hystérésis du milieu. Cet indicateur fournit des informations sur l'évolution de la distribution de contacts au cours de la compaction granulaire.

Dans le but de mieux comprendre le rôle des chaînes de force (chaînes de billes plus fortement précontraintes que la moyenne) sur la propagation acoustique, un réseau granulaire cubique est modélisé. La possibilité de guider les ondes acoustique, soit entre les chaînes de force, soit le long de celles-ci, est mise en évidence.

**Mots clés :** Acoustique non linéaire, Milieux granulaires, Compaction, Résonances non linéaires, Paramètre de Read, Réseau granulaire cubique, Chaînes de force, Clappement, Distribution de contacts.

---

**Title : Characterization of granular media compaction by linear and nonlinear acoustic methods.**

Recently, an increasing number of experimental observations and modelisations have been done in microinhomogeneous media, like rocks or granular media, using nonlinear acoustic methods. These methods have showed a huge sensitivity to detect structures defects (fissures, inter-grain contacts) and are used for non-destructive testing of fissured or damaged materials. Granular media, composed of non-cohesive grains, contain contacts providing them a strong acoustic nonlinearity. They constitute then a interesting material with applications in many industrial branches. Particularly, compaction process, i.e. the diminishing of the total volume of the packing, is widely used practically : ground stabilization before construction, ballasts, .... Here we report first applications of the methods of nonlinear acoustics for the characterization of the compaction process of unconsolidated granular media.

Firstly, an experimental setup for the compaction process of a granular random packing is described, containing the measurement of the evolution of the total volume of the packing. The media is probed during compaction by mean of acoustic waves, allowing the measurement of linear acoustic parameter like sound velocity variation and linear attenuation. Secondly, nonlinear acoustic waves are used to probe the compaction process. Quadratic nonlinear parameter is extracted from the study of harmonic generation and frequency-mixing process. The relative role of nonlinear elasticity (diminishing of nonlinear elastic modulus) and nonlinear dissipative properties (increase of nonlinear attenuation) are analyzed by mean of nonlinear resonance methods. A simple qualitative theoretical model explaining the experimental observation of faster diminishing in the compaction process of the elastic nonlinearity in comparison with dissipative nonlinearity has been developed. The theoretical predictions confirm that nonlinear acoustic methods could become an attractive tool for compaction monitoring.

Finally, in order to better understand the role of force chains (bead chains more pre-stressed than the average) on acoustic wave propagation, a cubic granular crystal is modeled. The opportunity of guiding acoustic waves between force chains or along them is highlighted.

**Keywords :** Nonlinear acoustics, Granular media, Compaction process, Nonlinear resonances, Read parameter, Granular crystal, Force chains, Clapping, Contact force distribution.